О БЕСКОНЕЧНОМ – 3*

Л.Н.Победин

Эта статья является продолжением работ, опубликованных в настоящем журнале ранее [1], и направлена на выявление сущности понятия бесконечного. Математические объекты суть идеальные понятия. Таково и понятие математической бесконечности. Однако некоторым идеальным математическим понятиям можно сопоставить объекты реального мира. К таковым относятся, например, геометрические понятия треугольника, прямоугольника, окружности. Разумеется, эти идеальные геометрические фигуры не являются точными копиями реальных физических объектов. Можно также сказать, что подобные идеальные математические понятия возникают из наблюдения над реальными объектами в результате процесса абстрагирования. Посмотрим, относится ли к таким понятиям математическая бесконечность в канторовской теории множеств.

Бесконечность и реальность

В обыденной жизни у нас может формироваться представление о бесконечном, когда мы размышляем о количестве песчинок на пляже, о количестве звезд на небе и т.д. Во всех подобных случаях, когда количество объектов необозримо большое, хочется сказать, что таких объектов бесконечно много. Тем не менее, хотя мы и не можем назвать точное число песчинок на данном пляже, мы понимаем, что это количество выражается очень большим, но все же конечным числом.

---

* Работа поддержана грантами Минобразования РФ в области гуманитарных наук (ГОО-1.1-391), а также Института “Открытое Общество” (Фонд Сороса), Россия (HBA 003).

© Победин Л.Н., 2002

Что же касается количества видимых звезд на небе (а есть еще и невидимые), то, согласно современным физическим представлениям, даже количество атомов во Вселенной не превышает числа 10 в десятой и еще раз в десятой степени. В случае же возникновения дискуссий о разных физических моделях реального мира мы можем увеличить трехступенчатую башню этого числа на одну (или две) ступени, так что все дискуссии прекратятся и мы получим хотя и очень большое, но все-таки конечное число. В это число заведомо уложится и само время существования Вселенной. Таким образом, в реальном физическом мире бесконечность мы не обнаруживаем. Что же это означает? Какую роль играет понятие бесконечности в математике?

Это означает только то, что если какому-либо понятию нет аналога в физической реальности, то и смотреть на него целесообразно лишь с точки зрения той пользы, которую оно приносит нашему мышлению. А здесь мы вслед за Гильбертом скажем, что "идеальные бесконечно удаленные элементы приносят ту пользу, что они делают систему законов и знаний возможно более простой и обозримой" [2].

В настоящее время в классической математике мы имеем стройную теорию бесконечности, – ведь канторовская теория множеств есть в первую очередь теория бесконечности. Но после впечатляющих результатов П.Коэна, касающихся независимости континуум-гипотезы, эта теория перестала быть единственно возможной. Действительно, теперь мы можем развивать разные теории множеств в зависимости от того, принимаем ли мы континуум-гипотезу или нет. Но такая ситуация является логически обескураживающей, ведь изначально мы строили одну теорию, а получили как минимум две. И мы не знаем, какую из них предпочесть. Ссылка на аналогичную ситуацию с евклидовой и неевклидовой геометрией (как и вообще большинство аналогий) в данном случае некорректна. В самом деле, для неевклидовой геометрии мы можем указать модель физической реальности, тогда как при выборе той или иной концепции теории множеств никакие ссылки на физическую реальность нам не помогут. Более того, поскольку мы изначально имеем дело с таким идеальным понятием бесконечности, которое не имеет аналога в физическом мире, постольку мы вправе ожидать, что в идеальном мире единственность теории должна иметь место. А если это не так, то данную ситуацию можно рассматривать как пример неадекватности наших идеализаций тем задачам, которые мы сами же себе и ставили. Так или иначе, но возникли реальные предпосылки для построения другой теории множеств, в основе которой лежало бы другое, отличное от канторовского понятие бесконечности. Это, однако, легко сказать, но трудно сделать. К счастью для нас, такой труд взял на себя чешский математик П.Вопенка. Он разработал соответствующую теорию и назвал ее альтернативной теорией множеств (AST). Основные идеи этой теории он сформулировал к 1973 г. [3].

Казалось бы, наличие в настоящее время двух теорий, двух точек зрения на бесконечное должно было бы вызвать бурные дискуссии, которые могли бы способствовать лучшему уяснению сущности понятия бесконечности. Однако этого не происходит. Причиной тому является, на наш взгляд, тот факт, что основные идеи альтернативной теории множеств имеют явно парадигмальный характер, если под сменой парадигмы понимать изменение и переосмысление системы устоявшихся научных взглядов. Как показывает история, такой процесс не проходит легко и безболезненно, зачастую он требует отказа от привычных способов мышления и выработки новых. Альтернативный взгляд на бесконечное не является только внутренним вопросом математики, а затрагивает мировоззренческие стороны естественных и гуманитарных наук, и, для того чтобы его принять, необходим серьезный философско-методологический анализ. К такому анализу двух основных понятий альтернативной теории множеств мы и переходим.

Четкость и нечеткость

Канторовская теория имеет дело с четко выделенными совокупностями объектов, которые называются множествами. Однако большинство совокупностей реального мира четко выделенными не являются. Например, не выделена четко совокупность всех ныне живущих на земле людей. Ведь если бы мы должны были решить, принадлежит ли к этой совокупности тот или иной человек, то у нас могли бы иной раз возникнуть немалые сомнения. Точно так же не являются четко выделенными совокупности всех съедобных блюд, интересных книг, красивых цветов. Короче говоря, почти всегда, когда мы наделяем совокупность каким-либо естественным свойством (т.е. помещаем в эту совокупность все объекты с этим свойством), данная совокупность выделяется нечетко. Будем называть такие нечеткие совокупности, вслед за Вопенкой, классами.

Центральная идея альтернативной теории множеств состоит в том, чтобы возложить на такие нечеткие совокупности ту роль, которую играет понятие бесконечности в классической математике. Оставляя в стороне вопросы формализации, попытаемся оценить открывающиеся возможности новой теории.

По существу, альтернативная бесконечность является чем-то неопределенно конечным. Поэтому в такой теории просто не возникают многие проблемы классической теории множеств. В частности, многие логические парадоксы имеют здесь простое и неожиданное решение (например, парадокс кучи просто лежит в основе альтернативной теории). Далее, результаты AST могут более адекватно применяться к физическим моделям, поскольку для альтернативной бесконечности можно просто указать объекты физической реальности.

Несомненно, однако, что у альтернативной теории множеств должны быть свои методологические особенности, которые могут оказаться весьма существенной преградой при ее принятии и развитии. В первую очередь такой преградой оказывается, как ни странно, философская проблема разделения наблюдаемых явлений на субъективные и объективные.

Согласно классическому представлению, объективные явления – это те, которые принадлежат к миру самому по себе, т.е. объективному миру, тогда как субъективные явления принадлежат исключительно к нашему сознанию. Наука занимается изучением самого мира, поэтому ее интересуют лишь объективные явления. Ее цель – освободить наше познание мира от субъективных наносов и через субъективные явления приблизиться к объективным, которыми эти субъективные явления были вызваны. Субъективные же явления мы имеем только потому, что наше восприятие несовершенно, – оно и является причиной всякой нечеткости воспринимаемых нами явлений. Так, например, лишь потому, что мы не имеем совершенного зрения, отдельные травинки на созерцаемой нами лужайке неразличимы: они сливаются в зеленое пятно с нечеткими границами. В этом случае действительно возникает дилемма: то ли признать нечеткость созерцаемой нами лужайки в качестве объективного свойства окружающего нас мира, то ли привлечь идеального наблюдателя, который видит лужайку как совокупность отдельных травинок (так же, как видит континуальный отрезок поточечно).

Соответствующие классы и не могли быть, по мнению Вопенки, предметом науки, поскольку они определены нечетко, а значит, субъективно (так считалось). Уяснению же того, что нечеткость является объективной характеристикой окружающего нас мира, способствует ключевое понятие AST – понятие горизонта.

Горизонт

Альтернативную бесконечность Вопенка называет *естественной бесконечностью*. Таким же естественным понятием AST является понятие горизонта.

Каждый наш взгляд, куда бы он ни был направлен, всегда чем-то ограничен. Либо на его пути оказывается твердая граница, четко его пресекающая, либо он ограничен горизонтом, по направлению к которому утрачивается ясность нашего видения. Например, наш взгляд на окружающее пространство, сосредоточенный на его размерности, четко ограничен тремя измерениями. Горизонтом ограничено наше видение вдаль, а также вглубь, т.е. при взгляде на все более мелкие предметы. Однако наш взгляд не есть только видение глазами, – он понимается в самом широком смысле. По-видимому, можно говорить о горизонте нашего познания, нашего ума, нашей мысли.

Четко преграждающие взгляд твердые границы нам представляются как нечто непреложное, как необходимые рамки, в которые заключен сам мир. Напротив, по направлению к горизонту мир для нас остается открытым. Хотя сам горизонт мы признаем четким явлением, но то, что лежит перед горизонтом, выделено нечетко. Чем ближе к горизонту находится нечто, тем хуже мы его видим. То есть по направлению к горизонту мы встречаемся с феноменом нечеткости. Чем ближе к горизонту, тем более ощутимо этот феномен проявляется. Но все нечеткое продолжается дальше или плавно переходит во что-то иное. Поэтому мир, лежащий перед горизонтом, должен продолжаться и за ним, но там он остается еще непознанным.

Горизонт не занимает определенного положения в мире, он может перемещаться. Существующий горизонт можно нередко отдалить или “преодолеть”. Но строго говоря, попасть за горизонт мы не можем. Преодоление существующего горизонта означает лишь то, что перед горизонтом оказалось нечто, бывшее прежде за горизонтом. Сам по себе горизонт является непреложной границей, которую мы не можем пересечь и которой ограничен наш взгляд. Но поскольку мы понимаем, что мир продолжается и за горизонтом, постольку горизонт является для нас не границей мира, а лишь границей нашего взгляда на мир (по этой причине, замечает Вопенка, горизонт и не стал непосредственным предметом для европейской науки).

Центральной аксиомой альтернативной теории множеств выступает аксиома экстраполяции за горизонт. Однако она требует отдельного рассмотрения.

Примечания

1. См: *Победин Л.Н.* О бесконечном // Философия науки. – 2001. – № 1(9). – С.91–98; *Он же.* О бесконечном – 2 // Философия науки. – 2001. – № 2(10). – С.102–107.
2. См: *Гильберт Дж.* // Основания геометрии. – М., 1948. – С.344.
3. См.: *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. – М., 1983.

Новосибирский государственный
университет, г. Новосибирск

Pobedin, L.N. **On the infinite – 3**

The paper goes on with the comparative analysis of classical and alternative concepts of infinity started earlier. It presents the methodological analysis of basic notions of the alternative set theory.