Проблемы логики и методологии науки

МАТЕМАТИКА И ФИЛОСОФИЯ: ТЕХНИЧЕСКИЕ ДЕТАЛИ И ФИЛОСОФСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ*

В.В. Целищев

В философии математики весьма значительное место занимает обсуждение так называемых *философских следствий* из важных математических результатов. Такого рода обсуждения ограничительных теорем Геделя и Тарского заполняют журналы и книги, производя впечатление, что интерпретация математических теорем почти неизбежно следует из формулировки самих теорем. Часто обсуждение философских следствий касается ограничений в ресурсах, которые имеет любой формальный аппарат доказательства соответствующих теорем. При этом доминируют две позиции. Одни исследователи считают, что если ресурсы не позволяют смоделировать некоторую концепцию, тогда этой концепции не существует в корректном виде. Другие полагают, что математическая практика включает такое понимание концепций, которое не подвержено ограничениям в ресурсах формального языка. Обе точки зрения вполне правомерны в плане философской интерпретации математических результатов. Но неправомерным является смешение этих двух точек зрения, когда ограничения, касающиеся чисто формальных ресурсов, переносятся автоматически на неформализованную математическую практику. Другими словами,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 01–03–00131. Этим же проектом поддержана работа “Поиски новой философии математики”, опубликованная в журнале ранее (2001, № 3 (11)).

следует быть предельно аккуратным при выведении философских следствий из математических теорем, поскольку часто происходит вышеупомянутое смешение деталей, относящихся к разным областям знания, имеющим разные критерии адекватности и обоснования. Именно такое положение дел наблюдается в связи с философскими следствиями из теоремы Левенгейма – Сколема.

Хорошо известна релятивистская интерпретация этой теоремы, принадлежащая самому Т.Сколему и надолго утвердившаяся в качестве стандартной интерпретации в философии математики. В популярных изложениях релятивизм подобного рода вполне соответствовал по духу своему "странностям" оснований математики и теории множеств. Теорема Левенгейма – Сколема утверждает, что любая теория первого порядка, имеющая несчетную модель, имеет также счетную модель. Сколем и его сторонники делают вывод, что не существует такой вещи, как "абсолютная" несчетность, а существует несчетность лишь относительно формальной системы и поэтому во вселенной существуют только конечные, или счетные, множества. Множество, которое несчетно в формальной теории, счетно вне теории, в метаязыке, и отсюда никакой термин формальной теории не может рассматриваться как обозначающий нечто большее, чем относительно несчетное.

Хотя с подобным парадоксальным выводом согласились многие философы математики, все еще оставалось ощущение, что это не подлинный парадокс. Тем не менее особых дискуссий по этому поводу не наблюдалось до тех пор, пока Х.Патнэм не сделал парадокс Сколема основой целого направления в эпистемологии, а именно, "внутреннего реализма" [1]. Эта концепция, базируясь на строгом математическом результате, являлась ярким примером аргументации от математики к философии. Такая аргументация вызвала новые споры относительно правомерности перенесения ограничений ресурсов формального языка на математическую практику. Мало того, Патнэм перенес подобные ограничения на весь язык в целом, придя к глобальным выводам относительно значимости чисто математической теоремы для всего языка.

Серия дискуссий, вызванных Патнэмом, недавно в некотором смысле завершилась обнаружением того, что в его аргументации есть существеннейшие изъяны, связанные как раз с теми вещами, которые важны при философской интерпретации математических результатов [2]. В частности, нужно четко эксплицировать релевантность математического результата философскому тезису и, кроме того, понять, в какой степени заключения от математики к философии могут быть приемлемы с точки зрения некоторой философской позиции, которая обременена многими неявными посылками. Цель философии математики состоит не только в попытке интерпретации математических результатов, но и в анализе этих неявных посылок, экспликация которых делает многие интерпретации математических результатов сомнительными. Данная статья посвящена некоторым деталям попыток интерпретаций теоремы Левенгейма – Сколема и парадокса Сколема с учетом как раз того обстоятельства, что в такого рода интерпретациях часто игнорируются эти детали. При этом получается довольно сильное искажение возможностей формализмов при анализе философских проблем. Далее, предлагаемая статья не касается деталей дискуссии об аргументе Патнэма и его теории внутреннего реализма, которые представляют собой отдельную тему, опять-таки связанную с интерпретацией теоремы Левенгейма – Сколема.

Как известно, стандартная аксиоматика для теории множеств представлена системой Цермело – Френкеля, которая рассматривается как вполне удовлетворительная для чисто математических целей. Между тем философские интерпретации концепций, входящих в аксиоматику, встречаются с множеством неясностей и затруднений, порождающих скепсис в отношении этих концепций.

Теория множеств имеет дело с бесконечными множествами, и впечатляющим открытием Кантора было обнаружение несчетных множеств, которые вызвали много споров среди математиков. Предложенная аксиоматика должна была отразить это важнейшее положение теории множеств. Между тем теорема Левенгейма – Сколема может быть интерпретирована как утверждение о том, что множество, считавшееся несчетным в одной системе, может оказаться счетным в другой системе. С философской точки зрения понятие множества, точнее, понятие кардинальности множества, теряет свой онтологический статус, что и является четким выражением скептической позиции в отношении понятия множества.

Не менее важным для скептической позиции является убеждение, что формализация теории множеств должна быть первопорядковой. Предпочтение языка первого порядка – вопрос огромной сложности, и здесь следует лишь отметить, что для обсуждения проблем аксиоматизации теории множеств он имеет первостепенное значение. Теорема Левенгейма – Сколема, на которой в существенной степени основан скепсис в отношении концепции множества, формулируется для языков первого порядка. Вес скептической позиции придает то обстоятельство, что критика концепции несчетных множеств, или бесконечности, разделяется многими направлениями в философии математики, и подтверждение их правоты со стороны уже не просто философских позиций, а со стороны установленной теоремы требует серьезной защиты со стороны приверженцев канторовской теории.

Следует заметить, что парадокс Сколема с относительностью понятия несчетного множества сторонниками скептического подхода вообще не считается парадоксом и не бросает, с их точки зрения, тень на первопорядковую аксиоматизацию теории множеств. Скорее, дело обстоит так, что подобного рода аксиоматизация является адекватной в качестве оснований математики, а несчетных множеств просто не существует. На этот счет сам Сколем высказался довольно четко: "Поскольку все размышление в аксиоматической теории множеств или в рамках формальных систем направлено на доказательство, что абсолютные несчетности не существуют, утверждение о существовании несчетных множеств должно рассматриваться просто как каламбур. Следовательно, такая абсолютная несчетность является просто фикцией. Истинное значение теоремы Левенгейма и заключается в критике абсолютной несчетности. Короче говоря, эта критика не сводит высшие бесконечности простой теории множеств к уровню абсурда, она сводит их к уровню не-объектов" [3].

Таким образом, происхождение скептицизма относительно понятия несчетного множества может быть представлено в виде следующего аргумента:

(1) теоретико-множественные концепции должны быть представлены в аксиоматической форме в формализме первого порядка;

(2) таким образом представленная теория множеств составляет адекватное основание для математики.

Согласно теореме Левенгейма – Сколема,

(3) теоретико-множественные понятия (и математические понятия, определенные ими) *относительны*, а не абсолютны.

В данном аргументе, несмотря на его четкость, есть все-таки некоторые неясности. Действительно, если налицо парадокс с несчетностью, то не будет ли естественнее предположить, что формализация первого порядка не "схватывает" концепции множества и, стало быть, не является адекватным основанием для математики. Такое заключение представляется в высшей степени естественным, и на самом деле с ним согласны многие исследователи. Далее, коль скоро парадокс присущ уже языку первого порядка, это может означать, что теория множеств не представляет собой адекватного основания для математики и, вообще, сама идея оснований математики может быть неверной затеей. Наконец, неясно, к чему относится заключение (3) – к самому формализму или же к интерпретации формализма.

Рассмотрим сначала проблему оснований математики. Уже в своих ранних работах Сколем, атакуя Цермело, тем не менее, признавал идею оснований математики. Правда, у него были своеобразные представления об этих основаниях. Аксиоматическая теория множеств не признавалась им адекватными основаниями математики. А.Джордж отмечает в этой связи следующее обстоятельство [4]. Согласно Сколему, если некоторая система должна обеспечить адекватное основание для некоторой области, тогда все свойства системы оснований должны быть свойствами области, для которой предлагаются основания. Ментальные объекты математики, составляющие область, для которой предназначены основания, через интуицию обладают непосредственной ясностью. Стало быть, и аксиоматическая теория множеств, претендующая на основания, должна придавать понятиям теории множеств такую же интуитивную ясность. Но этого не происходит из-за релятивизма.

Подобного рода взгляд сходен с интуиционизмом, и многие полагают Сколема действительно интуиционистом, правда своеобразным. С его точки зрения, окончательным критерием значимости доказательства и допустимости объектов является их интуитивная ясность. Апелляция к интуиции вовсе не исключает того, что в принципе мы можем с помощью аксиоматической теории прийти к интуитивно оправданной картине математики. Однако Сколем исключил эту возможность, судя по всему, имея в виду парадокс Рассела. Как и большинство математиков того времени, Сколем рассматривал этот парадокс как симптом неясности логических принципов, лежащих в основе нашего логического мышления, и полагал, что математическая интуиция не говорит в пользу множеств. Тем не менее интуиционизм Сколема следует считать весьма своеобразным. Во-первых, по собственному его признанию, свои идеи он развил, не имея представления о работах Брауэра. Во-вторых, будь он полноценным интуиционистом, отказ от признания несчетных множеств был бы для него просто частью его кредо интуициониста и ему не нужно было бы прибегать к аргументации, связанной с теоремой Левенгейма – Сколема.

При обсуждении теоремы Левенгейма – Сколема и релятивизма Сколема часто упускаются из виду две чрезвычайно важные детали. Во-первых, у Сколема есть два доказательства знаменитой теоремы. В первом

(1920 г.) для сведения универсума исходной модели к счетному числу элементов используется аксиома выбора, во втором (1922 г.) эта аксиома не используется. Так что неправильно говорить о единственной теореме Левенгейма – Сколема. Первый результат с аксиомой выбора сильнее, потому что гарантируемая счетная модель есть ограничение несчетной. Второй результат не дает такой гарантии, и счетная модель строится так, что не имеет отношения в исходной модели. Сколем с неохотой признавал существование первой из этих версий, так как чувствовал, что исследования в области основания теории множеств лучше всего проводить без аксиомы выбора. По этой причине Сколем ограничил свою отбраковку философских и основательных исследований вторым результатом [5].

Во-вторых, релятивизм Сколема явился результатом внезапного философского обращения, отказа от тех взглядов, которые он исповедовал до начала 40-х годов. Как уже говорилось, Сколем был своего рода интуиционистом, и следы интуиционизма видны в его ранней статье 1922 г. [6], где он атакует аксиоматику Цермело, причем буквально по всем пунктам, т.е. возражая против всех его аксиом. Материал, на который обрушился Сколем, содержался в знаменитой статье Э.Цермело 1908 г. [7].

В этой статье Цермело провозгласил три главных тезиса: во-первых, основанием математики является теория множеств; во-вторых, парадоксы наивной теории множеств могут быть блокированы аксиоматизацией; в-третьих, аксиомы теории множеств могут служить основаниями всей математики. Сколем спорит по всем трем тезисам, и ряд его замечаний до сих пор представляют значительный интерес для тех, кто исследует основания математики, даже несмотря на то, что сам Сколем отказался от своей критики.

В своей знаменитой статье 1922 г. [8] Сколем детально критикует всю программу Цермело и среди аргументов важное место отводит понятию области. С точки зрения Сколема, если аксиомы справедливы для некоторой области объектов, для этой области должны быть справедливы и теоремы теории множеств. В этом случае понятие множества сводится к понятию области, что производит впечатление порочного круга, поскольку понятие множества и есть в некотором роде понятие области. Если же речь идет о специфицированном универсуме, тогда это понятие вряд ли может претендовать на то, чтобы выступать основанием математики, будучи просто одной из ее специальных совокупностей.

Далее, у Сколема вызывает беспокойство знаменитая аксиома “свертывания” (в русской терминологии, в английской – comprehension, в исходной немецкой – Aussonderungs). Предложение Сколема заменить эту действительно беспокоящую аксиому с ее центральным понятием *определенного свойства*, которое приводит к парадоксам, синтаксической концепцией открытого предложения с единственной свободной переменной впоследствии нашло важное применение в математической логике. В частности, такой прием позволяет Сколему предположить, что аксиомы Цермело составляют счетное множество предложений первого порядка и в силу этого аксиоматика Цермело должна иметь модель в целых числах, если она вообще имеет модель. Фактически это и есть несколько упрощенное доказательство теоремы Левенгейма – Сколема. Имея в виду две версии доказательства теоремы Сколемом, можно оценить важность уточнения им понятия *определенного свойства* Цермело.

При этом грех за возникающие трудности Сколем возлагает не на понятие множества, а на понятие конкретной аксиоматизации, и, больше того, возникающие при этом трудности с понятием множества он считает результатом относительности концепции множества в отношении различных аксиоматических систем. Причем такая относительность заходит настолько далеко, что речь идет уже просто о вербальном определении соответствующих математических объектов: «С подходящим аксиоматическим базисом, следовательно, теоремы теории множеств могут быть сделаны справедливыми в простом вербальном смысле, естественно, в предположении, что аксиоматизация непротиворечива; но это покоится на том факте, что использование слова “множество” отрегулировано подходящим образом. Мы всегда можем определить совокупности, которые не называются множествами; если же мы назовем их множествами, то теоремы теории множеств перестанут быть справедливыми» [9].

Итак, атака Сколема на аксиоматику теории множеств Цермело основывается на двух “китах” – на недоверии по отношению к аксиоматизации теории множеств и на его концепции относительности понятия множества к аксиоматической системе. Часто при изложении философии Сколема (если таковая была вообще) заведомо путаются две эти точки зрения и результат путаницы представляется как знаменитый релятивизм Сколема (та самая философия, которая все-таки имеется у него). Между тем именно аксиоматика ответственна за этот самый релятивизм, что видно из известного пассажа самого Сколема: «Благодаря аксиомам мы можем доказать существование более высоких кардинальностей, более высоких числовых классов и т.д. Как же может тогда случиться, что вся область *B* может быть уже перенумерована посредством положительных чисел? Объяснение найти нетрудно. В аксиоматизации “множество” не означает произвольно определенной совокупности; множества являются не чем иным, как объектами, связанными друг с другом через определенные отношения, выраженные аксиомами. Отсюда нет никакого противоречия в том, что множество *M* области *B* несчетно в смысле аксиоматизации, потому что это означает просто то, что *в рамках B* нет одно-однозначного соответствия *Φ* множества *M* в Z_0 (числовая последовательность Цермело). Тем не менее существует возможность нумерации всех объектов в *B* и, следовательно, также элементов *M* посредством позитивных чисел. Конечно, такая нумерация есть также совокупность определенных частей, но эта совокупность не есть “множество”, т.е. не входит в область *B*)” [10].

Философская нечеткость взглядов Сколема проявилась весьма своеобразно. В период между появлением статьи 1922 г., в которой он обрушился на аксиоматику Цермело, и статьи 1941 г. [11], где он выразил свое новое понимание оснований математики, Сколем полностью доверился формализмам (заметим, только формализмам первого порядка) и аксиоматике. При этом следует отметить, что релятивизм остался при нем. Но именно релятивизм представляет собой наибольшую трудность для философии математики, – появился даже специальный термин “сколемизм”, что равносильно обозначению скептической позиции в отношении понятия множества.

Во-первых, есть проблема правомерности утверждений сторонников канторовской теории множеств о существовании множеств с большой кардинальностью: в какой степени эти онтологические допущения могут быть оправданы эпистемологически? Во-вторых, есть проблема чисто техническая: является ли парадокс Сколема подлинным парадоксом, для которого нельзя найти технического решения? Наконец, в какой степени технические решения, если таковые есть, парадокса Сколема, задевают по-настоящему философские основания математики? В отношении последнего вопроса существуют свои крайности. Так, Х.Патнэм полагает, что парадокс Сколема является разновидностью более фундаментального затруднения, которое он называет “сколемизацией всего” и которое относится к эпистемологии, а не к собственно математике [12]. В любом случае анализ структуры парадокса Сколема является крайне важным. В этом отношении существеннейшую роль играют работа П.Бенацеррафа [13], являющаяся частью его полемики с К.Райтом.

До недавнего времени для дискуссии вокруг парадокса Сколема была характерна некоторая нерешительность, связанная с почти полным принятием убеждения в том, что релятивизм Сколема в отношении понятия множества представляет собой нечто большее, чем просто некоторый тезис философии математики. "Сколемизация всего", провозглашенная Х.Патнэмом, только усилила эту тенденцию, подняв интерпретацию математической теоремы до уровня значительного эпистемологического тезиса о природе языка. Так что непонятно было, что, собственно, следует обсуждать – саму философскую интерпретацию теоремы Левенгейма – Сколема или же общий скептический вызов теории познания. Поскольку основной целью этой статьи является отделение интерпретации технических результатов от слишком общих философских тезисов, представляется желательным дать все-таки отдельную трактовку собственно парадоксу Сколема и теореме Левенгейма – Сколема и "сколемизации всего" как скептическому вызову. В частности, желательно было бы отделить релятивизм, который мотивируется многими внешними факторами (и лишь на первый взгляд является следствием теоремы Левенгейма – Сколема), от анализа собственно парадокса Сколема и теоремы Левенгейма – Сколема.

Рассмотрим "действие" теоремы Левенгейма – Сколема на примере аксиомы множества-степени. На первый взгляд эта теорема противоречит теореме Кантора, согласно которой в данном случае элементы множества-степени целых чисел не могут быть поставлены в 1-1 соответствие с целыми числами. Из теоремы же Левенгейма – Сколема следует, что аксиомы Цермело – Френкеля имеют дело, самое большее, со счетным числом объектов и отсюда множество-степень целых чисел, как объект теории, само счетно. Бенацерраф подчеркивает в связи с этим, что такая формулировка следствий теоремы Левенгейма – Сколема является результатом простой путаницы. В частности, эта теорема не влечет за собой счетности числа тех объектов, с которыми имеет дело система Цермело – Френкеля, равно как и счетности самих объектов. Речь в теореме идет лишь о том, что если система аксиом Цермело – Френкеля имеет модель вообще, то эта теория множеств имеет и нестандартные модели.

Для понимания того, почему такая путаница возникает, Бенацерраф [14] вводит новую версию теоремы Левенгейма – Сколема, так называемую транзитивную счетную субмодельную версию (далее ТСМ). Модель транзитивна, если и только если каждый элемент каждого множества в модели принадлежит к области модели. Как видно, намеренная интерпретация системы Цермело – Френкеля включает транзитивную модель. Тогда согласно ТСМ, если система Цермело – Френкеля имеет намеренную модель вообще, то система Цермело – Френкеля может иметь интерпретацию в счетной подобласти множеств, включенных в намеренную интерпретацию, такую что "$\in$" продолжает оставаться отношением членства, и каждое множество в области новой интерпретации само, самое большее, счетно.

Рассмотрим, как появляется противоречие в этой версии теоремы Левенгейма – Сколема. Аксиома множества-степени имеет следующий вид:

$$(\forall x)\,(\exists u)\,(\forall t)\,[t \in u \equiv (\forall y)(y \in t \supset y \in x)]$$

Пусть x будет Z_0, множество положительных чисел. Пусть D будет область намеренной интерпретации и D' – область подмодели. По предположению аргумента Z_0 есть элемент обеих областей и, так как аксиома множества-степени справедлива при намеренной интерпретации для D и D' (следует учесть, что "$\in$" имеет в подмодели ту же интерпретацию, что и в модели, и является единственной нелогической константой в аксиоме), множество-степень множества Z_0 (PZ_0), которое обозначается в аксиоме через u, должно быть элементом как D, так и D'. И вот тут мы имеем противоречие. Из канторовской теоремы, доказуемой в системы Цермело – Френкеля, следует, что не существует 1-1 соответствия между Z_0 и PZ_0; но если PZ_0 есть элемент транзитивной, счетной подмодели системы Цермело – Френкеля, то оно должно быть также счетным и, стало быть, должно иметься 1-1 соответствие.

Это противоречие устраняется после экспликации следующего неявного предположения. Оно заключается в том, что если Z_0 есть элемент как D, так и D', тогда тот факт, что аксиома множества-степени справедлива для обеих областей без переинтерпретации ее единственной нелогической связки, есть гарантия, что PZ_0 есть также элемент обеих областей. Но как замечает Райт, это предположение попросту неверно [15]. Аксиома лишь гарантирует нам, что каждая область будет содержать для Z_0 множество u, которое содержит каждый t в этой области, удовлетворяющий условию в правой части эквивалентности наравне с Z_0. Но нет никакой необходимости считать их *одним и тем же* множеством, поскольку это зависит от соответствующих универсумов квантификации t в двух областях. Если эти области не одни и те же, нельзя предполагать, что PZ_0, которая есть элемент D', есть на самом деле PZ_0 – полноценное множество-степень целых чисел. Поскольку предположение о тождественности этих двух множеств неосновательно, транзитивная счетность D' никоим образом не находится в противоречии с несчетностью PZ_0.

Следует сделать несколько методологических комментариев к этому техническому устранению кажущегося противоречия. Дело в том, что противоречие может устраняться, а может и избегаться. В случае релятивизма мы имеем классический случай избегания противоречий. Райт пишет, что, как и в случае морального релятивизма, когда противоречивые моральные суждения оправдываются различными моральными стандартами, релятивизм в теории множеств есть способ избежать противоречия путем постулирования неоднозначности терминов [16].

Релятивист полагает, что внутри системы Цермело – Френкеля не может быть определено 1-1 соответствие между Z_0 и PZ_0 и в то же время такое соответствие может быть определено вне системы, но уже такими методами, для которых формализация системы Цермело – Френкеля не является адекватной. Однако если неформализуемость отображения Z_0 в PZ_0 в рамках системы Цермело – Френкеля есть результат ограниченности формализации, тогда нужно дать веские аргументы в пользу того, что такое отображение должно быть доказуемо на содержательном уровне. Но такая попытка была бы в высшей степени странной, ведь теорема Кантора как раз и доказана на содержательном уровне и в ней показана невозможность обсуждаемого отображения.

Противоречие устраняется, как видно, при более тщательном анализе двух понятий – области интерпретации и области квантификации. Поэтому Бенацерраф делает вывод, что невыразимость концепции множества в рамках теории первого порядка зависит от этих двух понятий [17].

Понятие интерпретации, при всей своей естественности, несет в себе множество тонких моментов. Рассмотрим, например, попытку характеристики чисел с помощью неинтерпретированных аксиом. Известно, что для каждого натурального числа n может быть выписан набор аксиом первого порядка, которые выполнимы в области D, если и только если D имеет в точности n членов. Однако с помощью неинтерпретированных аксиом нельзя выразить различия между “счетным” и “несчетным”. Понятное в содержательной теории, подобное различие здесь не проходит, так как хотя можно выписать аксиомы первого порядка, которые выполнимы, но невыполнимы в любой конечной области, нельзя выписать множества аксиом первого порядка, которые выполнимы в несчетной области, но невыполнимы в любой счетной области. Таким образом, не вводя интерпретации аксиом, мы не можем выразить содержательное различие огромной важности. Мораль может быть и более жесткой: выразительные возможности синтаксиса первопорядковой теории слишком скудны для такого различия.

Коль скоро понятие несчетности не является выразимым на уровне логики первого порядка, можно прибегнуть к логике второго порядка, заимствуя из нее самые скромные (минимальные) средства. Типичным вариантом такого подхода будет введение специального предиката второго порядка, скажем $U(x)$, характеризующего несчетность. Можно представить себе такую ситуацию, при которой в некоторой теории первого порядка $U(x)$ будет теоремой аксиоматической теории. Но хотя содержательно этот предикат выражает несчетность, это значение не “схватывается” на формальном уровне. Парадоксальность начинается с того момента, когда мы признаем, что теория с $U(x)$ допускает, согласно теореме Левенгейма – Сколема, счетные модели. Как это может случиться? Счетная модель, гарантируемая теоремой Левенгейма – Сколема, состоит из множеств. В то же время у нас имеется “суботношение” принадлежности “$\in$” на некоторой стандартной модели, которая предполагается в качестве исходной при содержательном анализе. При таком анализе мы можем говорить о несчетном множестве, которое может быть перенумеровано некоторой функцией в одной системе, а в другой системе, которая содержит предикат несчетности $U(x)$, эта функция не может быть определена. Другими словами, эта функция находится вне области действия кванторов с предикатом $U(x)$.

Таким образом, вырисовывается фундаментальное различие между теми, кто допускает несчетные множества и кого естественно называть “канторианцами”, и теми, кто выражает сомнения по поводу существования таких множеств и кого столь же естественно называть “сколемитами”. Как видно, различие это упирается в соотношение содержательной теории и возможностей ее формализации, цель которой состоит в том, чтобы “схватить” содержание неформальных понятий. Проблема заключается в том, насколько ей это удается в принципе. На уровне содержательных теорий существование несчетных множеств допускается заранее. Но формализация обладает некоторого рода автономией, и если будет решено, что формализация первого порядка достаточна, тогда все, что выходит за ее пределы, все, что не “схватывается” ею, не существует. Именно такова позиция сколемитов. Они считают, что “бремя доказательства” существования несчетных множеств лежит на канторианцах.

Поскольку спор между сколемитами и канторианцами есть спор о соотношении содержательного и формализованного, постольку вполне возможен спор о том, как получается убеждение в существовании несчетного множества в свете теоремы Левенгейма – Сколема. Спор идет в терминах объяснительных схем, которые предлагает противоположная сторона для объяснения поведения другой.

Начинаем с того, как сколемит объясняет, почему его противник канторианец не может перенумеровать свое “несчетное” множество (так это представлено в работе Бенацеррафа [18]). Канторианец прежде всего делает упор на том, что предикат несчетности $U(x)$ есть теорема и что если этот предикат истинен для некоторого множества π, тогда это множество существует. Сколемит парирует этот аргумент тем, что несчетность эта может быть мнимой, поскольку состоит лишь в том, что у канторианца нет в распоряжении функции, которая устанавливала бы одно-однозначное отношение между целыми числами и множеством π, так как эти функции находятся вне области действия кванторов. Таким образом, “на самом деле” π является счетным множеством.

Все это рассуждение справедливо только при условии, что формализация как таковая обладает некоторого рода автономией, и при принятии по некоторой конвенции определенной формализации все, что не “схватывается” ею, объявляется несуществующим. Конечно, при этом такая формализация должна иметь массу других заслуг. Формализация первого порядка имеет столько заслуг, что Куайн объявил в свое время, что “first-order logic is logic enough”. Так что сколемит имеет свои резоны в приведенном выше рассуждении.

Но вопрос заключается в том, готов ли канторианец принять логику первого порядка в качестве такой логики, которая “схватывает” интуитивное содержание математических понятий. В частности, сохраняется ли значение, которое канторианец придает концепции несчетности, при формализации его в теории первого порядка. Это поднимает более общий вопрос о том, как термины содержательной математики приобретают значение в формализованной теории.

Обыденное представление о соотношении содержательной теории и ее формального аналога состоит в том, что терминам содержательной теории ставятся в соответствие формальные символы, так что при интерпретации формальной теории этим символам придается значение, совпадающее с содержательным. Но дело в том, что введение формальной теории подразумевает неинтерпретированное исчисление; термины этого неинтерпретированного исчисления мы снабжаем значением, и в случае совпадения этого значения с содержательным мы получаем “намеренную” интерпретацию. Приписывание интерпретации часто носит характер постулирования.

Поскольку постулирование является в значительной степени произвольным, на первый взгляд, действием, сколемиты утверждают, что значение терминов интерпретированного формального языка вовсе не обязано совпадать со значением терминов содержательной теории. Коль скоро существование несчетных множеств утверждается канторовской содержательной теорией, существование несчетных множеств в формализованной теории вовсе не гарантируется. Однако подобная аргументация не совсем убедительна, так как значения обоих языков, или обеих теорий, все-таки совпадают, поскольку при конструировании формального языка мы используем метаязык, который в значительной степени заимствует значения из содержательной теории.

Таким образом, при рассмотрении вопроса о соотношении содержательной и формальной теорий, который является решающим при обсуждении проблемы реального существования несчетных множеств, мы ограничились пока обсуждением того, каким образом получают значения термины формальной теории. Однако подлинное различие, как подчеркивает Бенацерраф, между сколемитами и канторианцами состоит в том, что первые предпочитают ограничиться именно таким обсуждением. Другими словами, регламентацию обыденного языка формальным языком первого порядка они считают достаточным шагом для "схватывания" (часто сводящегося к постулированию) значения содержательных концепций. Но вот с точки зрения канторианцев требуются еще важные дополнения, а именно, определение области квантификации, а также значения нелогических терминов словаря. Так, "$\in$" может означать отношение членства среди множеств, а $\forall$ будет универсальным квантором. Если же мы ограничиваемся, как сколемиты, только регламентацией содержательного языка логикой первого порядка, то всякая дальнейшая спецификация значения будет излишней, например для тех же символов "$\in$" и "$\forall$". Однако такая стратегия вряд ли может быть оправдана, поскольку язык первого порядка не имеет всех тех преимуществ, которые готовы перевесить все неудобства отсутствия явной процедуры приписывания значения.

Теперь возникает вопрос, являются ли эти шаги достаточными для регламентации содержательной теории первопорядковой логикой или же требуется что-то еще. И тут мы подходим к решающему различию между канторианцем и сколемитом. С точки зрения канторианца, важна еще и область квантификации, а также то, какие подмножества картезианских произведений этой области приписаны терминам нелогического словаря. Например, “$\in$” может означать отношение членства среди множеств. С точки зрения сколемита, последние шаги, связанные с заданием области квантификации, не необходимы и предыдущих шагов вполне достаточно для того, чтобы сделать неэффективной любую дальнейшую спецификацию значения, например, для “$\in$” или “$\forall$”. Но дело в том, что у сколемита нет никаких аргументов, позволяющих оправдать отказ от придания значения этим терминам и ограничить интерпретацию первопорядковой теоретико-модельной структурой объект-языка. Другими словами, такая структура выступает в качестве суррогата значения терминов содержательной математики. Между тем А.Тарский выступил против понимания символа “$\in$” как неинтерпретированного символа, поскольку именно такое понимание приводит к ненамеренным счетным моделям [19]. Он полагает, что если трактовать “$\in$” как логическую константу, счетные модели не могут появиться вообще. Таким образом, значение “$\in$” должно быть фиксированным при всех интерпретациях.

Таким образом, один из аспектов обсуждения философских следствий теоремы Левенгейма – Сколема заключается в том, “схватывается” ли значение терминов содержательной математики формализмами. Этот аспект может быть развит в свете общей теории значения в рамках философии языка. С технической точки зрения содержательная сторона отражена тем фактом, что в аксиоматике Цермело – Френкеля невозможно построить одно-однозначную функцию, которая отображает множество действительных чисел в множество натуральных чисел. Поскольку доказуемая в языке первого порядка теорема Левенгейма – Сколема утверждает противоположное, ясно, что интутивное содержание теории Кантора не сохраняется в такой ограниченной теории или не “схватывается” ею.

Естественно, что ответственность за такое положение дел с аксиоматической теорией возлагается на аксиомы. В данном случае приходится признать, что не каждая модель аксиом является допустимой интерпретацией. Это положение поднимает много вопросов как в отношении понятия аксиомы, так и в отношении понятия интерпретации. Действительно, если аксиома имеет несколько интерпретаций, то непонятно, по каким критериям считать некоторые из них допустимыми, а другие – нет. Здесь Бенацерраф вводит чрезвычайно важное предположение о том, что в отношении допустимых интерпретаций следует различать два типа неинтерпретированных языков. В одном случае имеется неинтерпретированный язык, для которого нет явной инртерпретации, а в другом случае неинтерпретированный язык допускает изначально допустимые интерпретации. Поскольку постановка проблемы о допустимых интерпретациях возникает в связи с теоремой Левенгейма – Сколема, вполне естественно предположение о том, что язык без явно обозначенной интерпретации не подлежит воздействию этой теоремы. Это означает, что сколемовская релятивизация применима только к определеному классу неинтерпретированных языков и что такой релятивизм, и это более важно, не является универсальным.

"Сколемизация всего", объявленная Патнэмом неизбежным следствием теоремы Левенгейма – Сколема, находится в разительном противоречии с подходом Бенацеррафа. Патнэм переводит разговор в плоскость всего языка, что оправданно лишь в той мере, в какой мы готовы трактовать парадоксальность теоремы как следствие неясности соотношения содержательных и формальных аспектов математического размышления. Если же эту неясность устранить твердой предпосылкой, что формализованная версия сохраняет связь с интуитивной математикой, тогда класс допустимых интерпретаций должен быть ограничен значением "$\in$" и областью квантификации. То есть формализации подлежит теория множеств, а не теория каких-то других объектов.

Но тогда встает вопрос, может ли значение утверждения (которое может быть придано ему в неинтерпретированном языке) быть более точным, чем интерпретация утверждения, понимаемая в теоретико-модельном смысле. Если вместе со Сколемом считать, что утверждения теории множеств могут быть отождествлены с тем, что инвариантно при всех классических моделях теории, тогда мы будем считать, что "$\in$" есть просто отношение, которое удовлетворяет аксиомам. Если же мы будем считать это отношение логической константой, оно будет отношением членства для множеств, а кванторы пробегают при этом над множествами.

Для оправдания вышеупомянутого утверждения мы должны признать, что понятие намеренной интерпретации является недостаточным. Намеренная интерпретация представляет собой наше намерение "схватить" содержательный аспект путем формализации логики и основных понятий математики. Само понятие множества включает в себя больше, чем такая намеренная интерпретация. Речь идет о справедливости аксиом теории множеств, и эта справедливость должна быть показана не только намеренной интерпретацией, но и некоторого рода объяснениями о возможностях формализации вообще. Эта проблема упирается в теорию значения и указания в языке и по сути своей – в проблему понимания языка. Как постоянно указывает Я.Хинтикка, язык может пониматься двумя фундаментально различными способами – как исчисление и как универсальный медиум для коммуникации [20]. Принятие одной из точек зрения имеет огромные следствия для того или иного понимания представленной в данной статье проблемы.

Примечания

1. См.: *Putnam H.* Models and reality // Journal of Symbolic Logic. – 1980. – V.45. – P. 464–482.
2. См.: *Bays Th.* On Putnam and his models // Journal of Philosophy. – 2001. – V.7. – P. 331–350.
3. *Skolem T.* Sur la portée du theorиme de Lewenheim – Skolem // Skolem T. Selected works in logic / Ed. E.J.Fenstad. – Oslo: Universitetsforlaget, 1970. – P. 468.
4. См.: *George A.* Skolem and Lewenheim – Skolem theorem: A case study of philosophical significance of mathematical results // History and Philosophy of Logic. – 1985. – V.6. – P. 75–89.
5. См.: *Skolem T.* Sur la portée du theorиme de Lewenheim – Skolem. – P. 78.
6. *Skolem T.* Einige Bemerkungen zur aximaticshen Begrundung der Mengelehre // From Frege to Gödel / Ed. van Heijenoort. – Cambridge, 1967. – P. 302–333.
7. *Zermelo E.* Investigations in the foundations of set theory // From Frege to G ödel.
8. *Skolem T.* Some remarks on axiomatized set theory // From Frege to G ödel.
9. Ibid. – P. 296.
10. Ibid. – P. 295.
11. *Skolem T.* Sur la portée du theorиme de Lewenheim – Skolem.
12. См.: *Putnam H.* Models and reality.
13. См.: *Benacerraf P.* Skolem and sceptic // The Proceedings of Aristotelian Society. – 1985. – Suppl. v. LIX. – P. 101.
14. Ibid.
15. *Wright C.* Skolem and sceptic. – P. 119, 120.
16. Ibid. – P. 117.
17. *Benacerraf P.* What mathematical truth could not be // Philosophy of Mathematics Today / Ed. T.Shirn. – Dordrecht, 1999. – P. 59.
18. Ibid. – P. 64, 65.
19. *Tarski A.* Remarks on Skolem // Skolem T. Selected Works in Logic . – P. 637, 638.
20. См.: *Hintikka Ja.* Lingua universalis vs calculus ratiocinator. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск

Tselishchev, V.V. **Mathematics and philosophy: technical results and philosophical interpretations**

The article is devoted to discussion of interrelation of technical results in mathematics and their philosophical implications. Skolem's paradox and Lewenheim – Scolem theorem are taken as samples in this discussion. Relativism of Scolem and his paradox is resolved according to specific view on relation between informal and axiomatized theory of sets.