ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ АКСИОМЫ: МОТИВАЦИЯ И РОЛЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОЗНАНИИ*

В.В.Целищев

Рассмотрение аксиом теории множеств в данной статье имеет цель показать значимость философских, в частности эпистемологических, подходов в современной математике. Поскольку аксиоматический метод в современной математике имеет широчайшее хождение, вопрос об обосновании аксиом с точки зрения работающего математика не представляется интересным, ибо новые аксиомы вводятся из соображений математической практики. Однако в случае теории множеств ситуация с аксиомами другая: поскольку теория множеств предстает в виде оснований всей математики, аксиомы теории множеств имеют особый статус, не сводящийся к одним лишь соображениям математической практики. Во-первых, некоторые аксиомы теории множеств никоим образом не являются очевидными и принятие той или иной аксиомы осуществляется на основании многих рассмотрений как методологического (и даже философского) характера, так и соображений, являющихся результатом проб и ошибок. Во-вторых, важнейшим обстоятельством при обосновании аксиом является то, что поиск новых аксиом в теории множеств служит решению проблемы определения размера континуума – одной из наиболее фундаментальных задач как математики, так и философии математики.

Проблема поиска оснований науки, в том числе оснований математики, занимавшая философов в последние 100 лет, в настоящее время кажется не столь уж интересной. Отказ от поиска оснований является краеугольным камнем многих философских направлений. В фи-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 01–03–00131.

лософии математики этот отказ мотивируется в первую очередь тем, что фундаментальные вопросы философии математики решаются исходя из соображений математической практики, а не наоборот. Другими словами, не методологические и философские установки определяют то, как развиваться математике, а математическая практика определяет интерес к тем или иным философским проблемам. Такую тенденцию, реализуемую в эпистемологии, В.Куайн окрестил “натурализацией эпистемологии” [1]. В философии математики натурализация особенно четко отстаивается Пенелопой Мэдди [2], идеи которой в значительной степени повлияли на формирование точки зрения, излагаемой в данной статье.

Натурализация эпистемологии математики ставит по-новому вопрос о статусе и характере аксиом. Вместо того чтобы быть основанием математического знания, некоторого рода фундаментом для всего здания математических истин, аксиомы становятся частью квазиэмпирического исследования природы, оказываясь таким образом полным аналогом свидетельств в эмпирических науках. В этом случае вопрос о принятии аксиом, их мотивации и очевидности становится вопросом прагматическим, находящимся вне компетенции философских школ и направлений. Фактически введение и обоснование аксиом определяются математической задачей.

Теории о мире основываются на свидетельствах, физические теории – на эмпирических свидетельствах, а математические – на доказательствах. В истории философии значительные усилия были потрачены на споры по поводу того, какие из свидетельств являются более надежными. Доминировавшая почти во все времена философская традиция полагала математические свидетельства достоверными, а эмпирические – контингентными, и, стало быть, по всем эпистемологическим критериям первые являются предпочтительными. Отсюда вековое стремление философии быть похожей на математику – тенденция, которая осуждалась и осуждается многими мыслителями [3]. Но как бы то ни было, само доказательство исходит из аксиом, и тогда достоверность математического знания основывается на аксиомах. Поэтому любой разговор о природе математических истин должен начинаться с обсуждения природы математических аксиом.

Реализм в философии математики, в самой простой формулировке, утверждает, что математика описывает математическую реальность, существующую вне и независимо от человеческого разума. Правильно описывающие эту реальность утверждения являются математическими истинами, которые доказуемы исходя из аксиом. Если предположить, что вся математика в весьма определенном смысле сводима к теории множеств, тогда аксиомы этой теории должны иметь статус выделенных утверждений, обоснование истинности которых должно представлять собой специальную задачу.

Аксиоматизация как научный метод (если "дедуктивные науки" считать наукой) предполагает прежде всего содержательно сформулированные положения, полученные либо интуитивным образом, либо сложным процессом вывода из данных. В любом случае имеется совокупность утверждений, которая выступает в качестве теории, описывающей некоторый фрагмент реальности. Взаимоотношения утверждений внутри теории обычно в высшей степени запутанные и сложные. Задача аксиоматизации (точнее, одна из задач) состоит в систематизации этих взаимоотношений, т.е. в установлении некоторого порядка среди них, в установлении некоторой иерархии утверждений (одни являются более фундаментальными, другие – производными и т.д.). Естественно, что при этом к аксиомам – наиболее фундаментальным предположениям – предъявляются особые требования с точки зрения их ясности, базисного характера, истинности.

Разговор о самоочевидности аксиом в случае теории множеств теряет смысл почти на самых ранних этапах развития этой теории. Так, наиболее очевидное положение о том, что каждое свойство определяет множество, приводит к парадоксам. Больше того, практически все аксиомы не представляют собой ясных положений и для каждой из аксиом требуется значительное обоснование или, по крайней мере, мотивация.

Другая особенность аксиоматизации теории множеств заключается в следующем. Обычно сначала мы имеем истины, а затем пытаемся установить среди них порядок через формализацию, важнейшим элементом которой является аксиоматизация. Теория множеств в значительной степени отходит от этого сложившегося идеала аксиоматизации, и ее аксиомы имеют особый статус. С одной (можно сказать, наивной) точки зрения аксиомы теории множеств могут рассматриваться как истины об универсуме объектов, существующих независимо от мыслей математика. Эта платонистская позиция, как известно, ведет к парадоксам. С другой точки зрения аксиомы могут рассматриваться как базисные строительные блоки и принципы построения универсума определенного рода объектов. Это позиция концептуализма. Наконец, замыкает знаменитую традиционную триаду философии математики формализм, согласно которому аксиомы могут рассматриваться в качестве правил “игры” с заново введенными символами, игры в конструирование доказательств.

Любой разговор об аксиоматизации теории множеств начинается в рамках первой точки зрения, так как это верно уже исторически. Кантор, Дедекинд и другие математики сделали более точными уже существовавшие понятия множества, класса, совокупности. Но новые определения этих понятий встретились со значительными трудностями, крайним выражением которых явились теоретико-множественные парадоксы.

Существуют две точки зрения на мотивы аксиоматизации наивной теории множеств Кантора. Одна из них, которую предпочитают философы математики, состоит в том, что аксиоматизация была призвана устранить парадоксы и гарантировать их недопущение в будущем. Эта точка зрения превалирует и в литературе по основаниям теории множеств. Другая точка зрения, которая завоевывает все больше сторонников среди тех, кто “учебному” преподнесению материала предпочитает открытие подлинно исторических обстоятельств, состоит в том, что аксиоматизация была предпринята исходя из внутренних потребностей математики. На самом деле, наверное, истина лежит посередине. Ведь можно считать, что аксиоматическая теория множеств Э.Цермело и теория типов Б.Рассела, появившиеся в одном и том же, 1908-м, году, представляли собой разные ответы на один и тот же вопрос. Предположение о том, что философски ориентированная теория Рассела и математически ориентированная теория Цермело отвечали на разные вопросы, было бы неестественным как исторически, так и концептуально. А раз эти две теории отвечают на один и тот же вопрос, вряд ли можно считать аксиоматизацию Цермело мотивированной только математическими потребностями.

С другой стороны, мотивация аксиоматизации теории множеств внутриматематическими потребностями весьма правдоподобна, если принять во внимание особый статус аксиом теории множеств. Реальная ситуация тут заключается не столько в том, что мы имеем истины теории множеств, и затем организуем их в аксиоматическую систему, а скорее, в том, что в теории есть такие вопросы, на которые нет ответов, и в их поисках постулируются новые аксиомы. В обычном случае аксиоматизация считается оправданной, если с помощью аксиом доказываются новые “правильные” теоремы. В теории множеств в отношении многих утверждений нет уверенности в том, являются ли они правильными теоремами. Безусловно, существуют косвенные подтверждения правильности теорем, и их роль необычайно велика, что и придает аксиомам теории множеств особый статус. П.Мэдди рассматривает в этой связи три разных свидетельства “правильности” математических утверждений: внутриматематические (внутренне присущие системе), внешние и “правило правой руки” [4]. В значительной степени аксиомы теории множеств мотивированы двумя последними свидетельствами, что, с одной стороны, придает им особый статус среди математических аксиом, а с другой стороны, сближает теорию множеств с эмпирическими дисциплинами, где подобного рода подтверждение является обычным делом. С эпистемологической точки зрения такое положение дел представляется чрезвычайно важным.

Различение внешних и внутренних аспектов мотивации аксиом отражает более общую эпистемологическую ситуацию в философии науки. Поиск оснований математики, который превалировал в последние 100 лет, постепенно вытесняется апелляцией к математической практике. Именно она оказывается существенной при поиске ответов на такие вопросы, как адекватность аксиом. В настоящее время в литературе по философии математики сплошь и рядом встречаются замечания о том, что считавшиеся ранее важными для математики исследовательские программы в философии математики на самом деле не имели такого уж большого значения. Скорее, все кардинальные вопросы оснований математики мотивировались не столько философскими затруднениями, сколько внутриматематическими потребностями. Дж. Мур в своей книге [5] демонстрирует исторические свидетельства, согласно которым первые аксиомы теории множеств были мотивированы прагматическим желанием доказать некоторые теоремы, а не намерением обезопасить основания математики от парадоксов. Такое переписывание истории науки – типичное занятие победителей, каковыми оказываются исследователи, апеллирующие к математической практике [6]. Хотя эта точка зрения и является господствующей в настоящее время, трудно отделаться от впечатления, что ее приверженцы не принимают во внимание историю создания Кантором теории множеств, в которой философские и теологические соображения занимают важнейшее место.

Общепринятым в литературе по теории множеств является обсуждение одной аксиоматической системы, а именно системы Цермело – Френкеля. Она является “стандартной” системой, а все остальные – в какой-то степени, если использовать сильные выражения, “экзотическими” системами (например, таково мнение о системе “New Foundations”

В.Куайна). Больше того, в силу этой стандартности многие стали считать, что именно данная аксиоматика отвечает внутренним свойствам множеств, что аксиомы естественно следуют из понятия множества. Как выразилась Мэдди, некоторые математики полагают аксиоматическую систему теории множеств Цермело – Френкеля буквальной истиной, а остальные дополнительные аксиомы или кандидаты на то, чтобы быть аксиомами, – просто метафизикой. Между тем статус стандартных аксиомы Цермело – Френкеля приобрели в силу исторической случайности, и поэтому они никак не могут занимать какого-то привилегированного положения по сравнению с другими аксиоматическими системами. И уж тем более, аксиомы Цермело – Френкеля не имеют предпочтительного эпистемологического статуса по сравнению с другими аксиомами в двух смыслах. Во-первых, эпистемологический интерес могут представлять другие аксиоматические системы, и, во-вторых, даже в рамках системы Цермело – Френкеля некоторые кандидаты в аксиомы могут эпистемологически выглядеть не менее респектабельными.

Тем не менее стандарты надо уважать, и поэтому далее мы рассмотрим аксиомы Цермело – Френкеля, по мере возможности дополняя их комментариями. Подробное рассмотрение даже "очевидных" аксиом призвано показать, в какой степени эти аксиомы мотивированы натурализацией математики, а в какой – философскими рассмотрениями. Баланс, как это можно предсказать, неясен, но само рассмотрение представляет, с нашей точки зрения, определенный интерес. Как обычно, предполагается, что аксиомы истинны в области математических сущностей определенного рода – в универсуме множеств. Все индивидные переменные x, y, z принимают значения в универсуме множеств. Существует единственное неопределенное отношение "$\in$", которое интерпретируется как отношение членства, так что "$a \in b$" означает "a есть элемент b". Отношение включения множеств, или отношение подмножества "$\subseteq$", может быть определено через отношение членства. Если два множества b и c таковы, что каждый элемент b есть также элемент c, тогда b является подмножеством c. В формальном виде

$$b \subseteq c \equiv \mathrm{Df}\ [x\,(x \in b \Rightarrow x \in c).$$

Аксиома экстенсиональности

Первой традиционно идет наиболее очевидная аксиома – аксиома экстенсиональности, которая формулируется следующим образом:

Если два множества имеют одни и те же элементы, они тождественны.

$$\forall x \forall y \forall z[(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = e].$$

Эта аксиома как будто вообще не требует комментариев в силу очевидности. Для начала заметим, что данная аксиома отделяет множества от других интенсиональных сущностей типа свойств; это означает, что способ компоновки элементов в совокупность, т.е. способ определения множества, несуществен для задания его тождественности. Одно и то же множество может иметь два и более определений. Другими словами, множество понимается как собрание элементов, совокупность, идентичность которой определяется ее членами.

Простота и ясность аксиомы экстенсиональности подводит к такой мысли: эта аксиома выражает столь фундаментальное свойство множества, что попросту является частью определения концепции множества. Это ощущение превосходно выразил Дж. Булос. Он полагает, что аксиома экстенсиональности имеет специальный эпистемологический статус, которого не имеют остальные аксиомы. Если кто-то скажет, что существуют различные множества с одними и теми же членами, он убедит нас в том, что использует понятия отличным от нашего образом. Это впечатление будет гораздо большим, чем при отрицании кем-либо другой аксиомы. Поэтому возникает искушение назвать аксиому экстенсиональности "аналитической", поскольку ее значение определяется значением входящих в нее понятий [7]. С аналитическим понятием связано много дискуссий, и одно из мнений, высказываемых многими исследователями, состоит в том, что аналитические утверждения пусты, т.е. не несут никакой информации. Это будет противоречить реалистическому пониманию математических истин как информативных утверждений о математической реальности.

С другой стороны, нет ничего противоречивого в интенсиональной концепции множества. Тогда аксиома экстенсиональности не будет аналитической. Действительно, в системе Principia Mathematica в качестве базисных сущностей выступают пропозициональные функции, являющиеся интенсиональными концепциями. Но дальнейший анализ этой системы показал, что гораздо проще работать с экстенсиональными сущностями. Дело в том, что одному экстенсиональному множеству соответствует много интенсиональных множеств, и если в основание математики кладутся интенсиональные множества, то требуется, во избежание произвола, объяснение того, почему выбрано то или иное интенсиональное множество. Ясно, что экстенсиональные множества в этом отношении проще. На такой трактовке настаивают Френкель, Бар-Хиллел и Леви [8]. Таким образом, можно считать, что основным соображением в пользу принятия аксиомы экстенсиональности служит соображение простоты теории. В терминологии Мэдди это обстоятельство является внешним по отношению к понятию множества, в то время как аналитичность рассматривалась бы как обстоятельство внутреннее.

Аксиома пустого множества

Следующая аксиома – это аксиома пустого множества. Она представляет технический интерес, будучи отправной точкой в конструировании всех остальных множеств. Однако с эпистемологической точки зрения эта аксиома очень важна. Дело в том, что принято проводить разделительную линию между логикой и теорией множеств таким образом, чтобы все экзистенциальные утверждения принадлежали к теории множеств, в то время как логика ничего не говорит о существовании. Такая точка зрения признается отнюдь не всеми, и далее мы рассмотрим и другие точки зрения, но пока будем считать, что теория множеств основана на логике первого порядка, которая не содержит экзистенциальных утверждений.

Сама аксиома пустого множества формулируется так:

> ***Существует пустое множество*** $\varnothing$***, которое не содержит элементов.***
>
> $(\exists x)(\forall y)\neg(y \in x)$.

Данная аксиома утверждает, что существует множество, не содержащее элементов. И она утверждает существование множества, из которого конструируются все остальные множества. Таким образом, это практически единственное по-настоящему экзистенциальное утверждение среди аксиом. Если постулируется существование пустого множества, тогда получаются и все остальные множества, и важно отметить, что только множества и никакие другие объекты. Принятие этой аксиомы означает, что весь универсум множеств творится из ничего. Данное обстоятельство вызывает массу трудностей в восприятии природы математики, и не в последнюю очередь – эпистемологические трудности.

Эта трудность превосходно ощущалась как Цермело, так и Расселом. Цермело называл пустое множество “фиктивным”, поскольку под множеством все-таки должно подразумеваться нечто такое, что имеет члены (т.е. множество чего-то). Рассел в одной из своих работ сравнил конструирование множеств из пустого множества с действием фокусника, вытаскивающего кроликов из шляпы. Но он отдавал себе отчет в том, что существует различие между философскими затруднениями и технической полезностью: “Для символических логиков, которые ощущают полезность пустого множества, [запрет на пустое множество] выглядит реакционным шагом. Но я в данном случае обсуждаю не то, что должно делаться в логических исчислениях, где практика использования пустого множества представляется мне наилучшей, а философскую истину относительно этого понятия” [9]. На это Расселу можно было бы возразить, что в математике есть много примеров подобного рода “фиктивных” объектов типа точек на бесконечности в геометрии и т.д. Именно такого взгляда придерживался Гедель. Опять-таки мы имеем дело с “внешним” критерием принятия математических объектов в качестве существующих. Отметим также, что с точки зрения математиков, по поводу пустого множества философы городят слишком много пустой метафизики, хотя при обсуждении этой концепции без философии не обойтись.

Иллюстрацией этого затруднения служит следующий пассаж из книги Р.Рукера “Бесконечность и ум”: “Универсум теории множеств графически представим в виде конуса, понимание которого связано с многими философскими концепциями. В вершине конуса находится точка, которая представляет собой пустое множество. Другими словами, вначале не существует вообще ничего. Затем появляется что-то, и эта мысль отвечает идее образования множества. Пустое множество есть нечто, но внутри него нет ничего. В определенном смысле такая мысленная конструкция напоминает фундаментальный философский вопрос о том, почему существует нечто, а не ничто. Утверждение о существовании в любом случае описывает бесспорный факт о мире. Но никто не знает, почему существует пустое множество. В пользу такого предположения можно привести лишь расплывчатую идею образования множества, которая отражает некоторый объективный аспект внешнего мира. Начиная с пустого множества мы входим в мир все более расширяющегося множества V, содержащего множества все большей и большей сложности. Различные уровни этих множеств называются частичными универсумами V_α, где α является рангом множества. В общем, $V_{\alpha+1}$ состоит из всех возможных подмножеств V_α” [10].

Есть еще одно, возможно более фундаментальное обоснование концепции пустого множества. Как отмечает П.Мэдди [11], согласно итеративной концепции множеств, множества образуются серией шагов начиная с вещей, которые не являются множествами, и на каждой стадии образуются все возможные множества вещей с предыдущей стадии. Таким образом, первая стадия требует пустого множества. Итеративная концепция множества влечет за собой массу следствий более общего толка, чем вопрос о пустом множестве, но если она принимается, тогда понятие пустого множества является частью значения концепции множества вообще и не требует специального обоснования.

Аксиома пары

Следующей аксиомой является аксиома пары:

> ***Если*** a ***и*** b ***множества, тогда существует множество*** $\{a\}$ ***с единственным элементом*** a***, а также существует множество*** $\{a,b\}$***, единственными элементами которого являются*** a ***и*** b***.***
>
> $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$.

До сих пор в качестве существующего у нас было только одно множество, которое не имеет членов. Аксиома пары позволяет нам сконструировать другие множества. Во-первых, аксиомой утверждается существование множества, которое имеет член. Пустое множество является множеством и, таким образом, объектом, и по этой аксиоме мы можем образовать множество $\{\varnothing\}$, чьим единственным членом будет пустое множество. Так что теперь имеется два множества – $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$. Аксиома пары утверждает существование множеств $\{\{\varnothing\}\}$ и $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$; таким образом, у нас есть уже четыре объекта. Повторное применение аксиомы утверждает существование всех множеств пар из этих четырех объектов и, кроме того, множеств, содержащих данные четыре объекта в качестве своего единственного члена. Повторение этого процесса дает какое угодно конечное число множеств, каждое из которых содержит один или два члена.

Несмотря на ясность этой аксиомы, в ней прослеживается интуитивная идея ограничения размера, а также упомянутая выше идея итеративного множества. Идея ограничения размера множества обсуждается многими математиками и философами как одна из ведущих идей теории множеств. Действительно, Кантор говорит о двух видах трансфинитных сущностей, один из которых является предметом математической теории бесконечности, а второй – абсолютной бесконечностью, постижение которой просто невозможно. Между тем понятие абсолютной бесконечности формулируется довольно точно: это совокупность всех ординальных чисел, которая не может быть представлена в виде "одной вещи", поскольку это приводило бы к парадоксу. Таким образом, математическая теория бесконечности не должна иметь дело со слишком "большими" совокупностями типа совокупности всех ординальных чисел. Значит, задача аксиоматической теории множеств состоит в том, чтобы не позволить образования этих "слишком больших" совокупностей (которые не называются множествами, потому что этот термин зарезервирован как раз для не слишком больших совокупностей). Но как определить, насколько большой является совокупность вещей, определяемых некоторой концепцией?

Дело в том, что процесс порождения, скажем, ординальных чисел не может быть завершен, хотя такая завершенность крайне желательна для того, чтобы совокупность порожденных множеств не была слишком большой. Любая совокупность, превосходящая некоторый такой предел, не будет собственно множеством. Поскольку множества определяются некоторым свойством, отказ от слишком больших множеств есть ограничение на применимость свойства к объектам. Так, можно предположить, что любое свойство имеет объем, если и только если невозможно установить одно-однозначное соответствие между ординальными числами и вещами с этим свойством. Это будет эффективным ограничением размера множеств. Однако данное ограничение имеет большой недостаток, поскольку предполагает существование ординальных чисел. Но откуда мы знаем, насколько далеко должны простираться ряды ординалов? Как заметил Рассел, вполне возможно, что уже множество натуральных чисел ω окажется на этом пути "недопустимым" [12]. Поэтому, говорит он, требуются дальнейшие аксиомы, до тех пор, как можно будет сказать, когда ряд становится недопустимо большим.

Если размер множества не может быть критерием того, является ли это множество слишком большим или достаточно малым, тогда существование некоторой совокупности объектов должно быть гарантировано независимо от соображений о размере множества. Коль скоро критериев размера нет, нужно проявлять осторожность, которая и выражена аксиомой пары. Действительно, множество $\{a,b\}$ имеет весьма скромный размер. Это фактически первый осторожный шаг на пути реализации программы ограничения размера множеств, каким бы тривиальным он ни казался.

Аксиома множества-суммы (аксиома объединения)

***Если** a **есть множество, тогда существует множество** $\cup a$ **– объединение всех элементов множества** a**; элементами нового множества являются все элементы элементов** a.*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in a \,\&\, w \in w)].$$

Эта аксиома утверждает существование множеств, содержащих любое число элементов. Например, объединение пар множеств, не имеющих общих элементов, когда одно множество содержит два элемента, а второе – один элемент, дает множество из трех элементов:

$$\cup\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

Повторение операции объединения дает большие множества, но опять-таки конечное их число. Этим самым достигается все та же политика получения "небольших" множеств их "небольших" множеств, а именно, совокупность, представляющая собой объединение "небольших" множеств, сама должна быть "небольшой". Другими словами, объединение небольших совокупностей небольших совокупностей должно быть небольшим.

Но даже в такой "безобидной" аксиоме нас могут подстерегать опасности. Дело в том, что объединение множества a может иметь больше членов, чем само a, что может привести к созданию слишком больших множеств. Но большинство математиков полагают, что эта аксиома не выведет множества за разумные пределы. Высказанные опасения не являются очень уж актуальными по той причине, что обе аксиомы – аксиома пары и аксиома объединения – выражают идеологию итеративной концепции множества, которая гарантирует разумные размеры множеств. Действительно, пусть имеются множества A и B, которые сформированы на некоторой стадии α. Тогда объединение A и B можно будет сделать на стадии $\alpha+1$, что и гарантирует аксиома пары. Для множества A, которое формируется на стадии α, его члены формируются на более ранней стадии, так что объединение членов $A - \cup A$ происходит на стадии α. Именно это устанавливает аксиома объединения.

Аксиома пары и аксиома множества-суммы, как видно, не дают достаточно больших множеств. Даже если допустить существование бесконечных счетных множеств, эти аксиомы не дадут нам существования континуума. Поэтому необходима более “сильная” аксиома, и уже Кантор использовал для получения достаточно больших множеств операцию возведения в степень. Полученные таким образом множества оправдываются аксиомой множества-степени. Но прежде нам нужно рассмотреть аксиому бесконечности, которая гарантирует существование бесконечных множеств.

Аксиома бесконечности

Имеется множество, которое содержит $\varnothing$ в качестве своего элемента, и такое, что если a есть элемент этого множества, тогда $\cup\{a, \{a\}\}$ (или $a \cup \{a\}$) есть также элемент этого множества.

$(\exists x)[\Lambda \in x \,\&\, (\forall y)(y \in x \Rightarrow (\exists)z(z \in x \,\&\, (\forall w)(w \in z \Leftrightarrow w \in y) \vee$
$w = y)))]$.

Аксиома бесконечности утверждает существование по крайней мере одного бесконечного множества, из которого могут быть порождены остальные бесконечные множества. Она утверждает существование множества, которому принадлежит $\varnothing$ и такого, что если к нему принадлежит $\varnothing$, к нему принадлежит и $\varnothing \cup \{\varnothing\}$. Поскольку $\varnothing$ не имеет членов, постольку $\varnothing \cup \{\varnothing\}$ имеет только один член, а именно $\varnothing$, и он, таким образом, тождествен $\{\varnothing\}$. Но тогда $\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ также принадлежит к множеству, и так далее. Поэтому множество, о существовании которого говорится в аксиоме, содержит последовательность

$$\underset{0}{\{\varnothing}, \underset{1}{\{\varnothing)}, \underset{2}{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}, \underset{3}{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}, \underset{\ldots}{\ldots}$$

Аксиома бесконечности не вызывает сейчас особых волнений среди математиков. Например, М.Тайлер говорит, что изложенные выше пять аксиом “не представляют особых проблем”, а вот остальные аксиомы менее ясны [13]. Другая точка зрения высказана в классическом обзоре А.Френкеля и И.Бар-Хиллела “Основания теории множеств” [14]. Авторы говорят о той части теории множеств, которая выводится из аксиомы экстенсиональности, аксиомы пары, аксиомы множества-суммы, аксиомы множества-степени, аксиомы выделения, как об общей теории множеств. Аксиома бесконечности у них занимает особое место. При таком положении дел имеет смысл обратиться к философским соображениям, высказанным Б.Расселом [15].

Как видно из формулировки аксиомы бесконечности, эта аксиома “заверяет нас (истинным или ложным образом), что имеются классы, имеющие n членов, и, таким образом, позволяет нам утверждать, что n не равно $n+1$. Без этой аксиомы мы остаемся с возможностью того, что оба числа n и $n+1$ могут оказаться нуль-классом” [16]. Далее Рассел пишет: “Давайте проиллюстрируем эту возможность на таком примере [17]: предположим, что в мире есть только 9 индивидов. Тогда индуктивные кардинальные числа от 0 до 9 будут такими, как мы и ожидаем, но 10 (определенное как 9+1) будет нуль-классом. Нужно вспомнить, что $n+1$ есть совокупность всех тех классов, которые имеют термин x такой, что когда x отнят, остается класс n терминов. Применяя это определение, мы видим, что в предполагаемом нами случае 9+1 есть класс, не состоящий из классов, то есть нуль класс. То же самое будет истинным о 9+2 и вообще о $9+n$, если n не есть 0. Таким образом, 10 и все последующие индуктивные числа будут тождественны, так как все они будут нуль-классом. В таком случае индуктивные кардинальные числа не образуют прогрессии, и не будет истинным утверждение о том, что два класса не могут иметь один и тот же последующий элемент, потому что 9 и 10 в качестве последующего элемента будут иметь нуль-класс. И вот для предотвращения таких арифметических катастроф и требуется аксиома бесконечности” [18].

Как отмечает далее Рассел, для того чтобы достигнуть любого заданного индуктивного кардинального числа, нам не требуется аксиомы бесконечности. Необходимость в ней возникает, когда мы имеем дело с целым рядом индуктивных кардинальных чисел, а класс всех индуктивных кардинальных чисел требуется для установления существования $\aleph_0$.

Аксиома бесконечности дает нам прекрасную возможность убедиться в том, что аксиомы действительно являются аксиомами, а не доказуемыми утверждениями, и вместе с тем показать, что приобретение аксиомами своего статуса упирается в весьма сложные материи философского толка. Опять прибегнем к обсуждению этого вопроса Расселом. Если образовать полное множество индивидов, классов, классов классов, и т.д., тогда взятые все вместе они образуют множество

$n + 2^n + 2$ в степени 2^n ... до бесконечности, которое есть $\aleph_0$. Таким образом, беря все виды объектов вместе и не ограничивая себя объектами какого-либо одного из типов, мы определенно получим бесконечный класс, и в этом случае аксиома бесконечности нам не нужна. Рассел замечает, что "есть тут ощущение какого-то фокуса: это напоминает фокусника, вытаскивающего из шляпы предметы. Человек, который носил шляпу, полностью уверен в том, что там не было кроликов, но он не в силах объяснить, откуда они там появились. Так и наш читатель, если у него есть здравое чувство реальности, будет убежден, что невозможно произвести бесконечную совокупность из конечной совокупности, хотя он, вполне возможно, не сможет найти изъянов в аргументации... И когда вышеприведенный аргумент подвергается проверке, он оказывается, с моей точки зрения, ошибочным" [19]. Рассел объясняет ошибку смешением типов, апеллируя при этом к своей теории типов.

Нам нет нужды углубляться в саму теорию типов, которая в некотором смысле выступает как конкурент аксиоматической теории множеств в разрешении теоретико-множественных парадоксов. Мы просто показали, что аксиома бесконечности является аксиомой уже потому, что попытки доказать ее приводят к фундаментальным трудностям. Причем трудности эти отнюдь не только математического или логического толка. Например, аксиома бесконечности говорит о множествах (классах в терминологии Рассела), множествах множеств и т.д. Но применима ли она к "подлинным индивидам" (природа которых нами здесь не уточняется, за исключением того, что они непредставимы как множества)? Этот вопрос упирается в множество "метафизических" представлений о том, что такое "индивид" или "вещь". Рассел говорит, что "если она (аксиома) истинна о них (вещах или индивидах), то она истинна о классах, из них состоящих, о классах классов, и т.д. Подобным же образом, если она ложна о них, она ложна о всей иерархии их. Поэтому вполне естественно провозгласить аксиому бесконечности о них, нежели о некоторой стадии в иерархии. Но что касается вопроса о том, является ли аксиома истинной или ложной, у нас до сих пор нет метода обнаружения этого" [20].

Аксиома бесконечности мотивируется, конечно же, идеями Кантора, которые Халетт назвал "канторовским финитизмом": "Множества трактуются как простые объекты независимо от того, являются ли они конечными или бесконечными. Определения действительных чисел, данные Кантором и Дедекиндом, приводят к рассмотрению бесконечных совокупностей как единых объектов, т.е. как индивидов.

Несмотря на то, что действительные числа с точки зрения их определений являются чрезвычайно сложными конструкциями, после их введения в теорию мы можем рассматривать их как простые объекты, – забудьте про сложность. Кантор распространил эту доктрину на все совокупности, которые являются предметом математического рассмотрения. Все эти совокупности считаются едиными объектами” [21].

Таким образом, аксиома бесконечности представляет собой выражение радикальной идеи Кантора о бесконечных совокупностях – идеи, которая была и остается столь же необычной, сколько и полезной. Если прибегнуть к терминологии Мэдди, то неясно, к каким соображениям отнести эту аксиому в нынешнее время: к внутренним или внешним. Ее очевидная полезность, провозглашенная во всеуслышанье Гильбертом, относится к внешним соображениям. С другой стороны, коль скоро идеи Кантора стали непременной частью современной математики, это говорит скорее о внутреннем характере.

Несмотря на приведенные выше пространные комментарии к этим нескольким аксиомам, практически все согласны с тем, что данные аксиомы достаточно просты и не вызывают каких-либо возражений. Однако в ходе построения теории множеств потребовались и другие, “менее ясные” аксиомы. Первой из таких аксиом мы представляем аксиому фундирования (*foundation* в английской терминологии) в том виде, в каком она сформулирована в русском переводе классической книги Френкеля и Бар-Хиллела.

Аксиома фундирования

***Если** a **– непустое множество, тогда имеется элемент** b **множества** a**, такой, что не имеется множеств, которые принадлежат обоим множествам** a **и** b.*

$$(\forall x)[\neg(x = \Lambda) \Rightarrow (\exists y)(y \in x \,\&\, (\forall z)(z \in x \Rightarrow \neg(z \in y)))].$$

Основная идея этой аксиомы касается ограничения способа образования множеств из других множеств. Число операций по образованию множеств не должно быть бесконечным во избежание создания слишком больших множеств. Система Цермело – Френкеля использует только конечное число итераций при собирании вместе всех продуктов конечных итераций. При этом аксиома не позволяет образовать множество, принадлежащее к самому себе. В техническом отношении содержание аксиомы таково: она утверждает, что в любом множестве имеются элементы, минимальные при отношении членства. То есть даже когда мы имеем бесконечное множество S, S не может содержать бесконечной последовательности $X = \{x_i : i \in N \& \neg (x_i = \Lambda)\}$ членов, таких что ... $\in x_2 \in x_1 \in x_0$, потому что X было бы множеством, которое имеет элемент, общий с каждым из его элементов, поскольку для каждого x_i, x_{i-1} принадлежит x_i и X. Даже множества типа ω, для которых $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots$, содержат в качестве членов множества, получающиеся в результате конечного числа приложений операции $x \cup \{x\}$ к Λ.

Как видно, кроме ограничения размера множеств есть более прямые пути избегания парадоксов, в частности парадокса Рассела. Приведенная аксиома исключает членство множества в самом себе, а также петли типа $A \in B$ и $B \in A$. Однако такая прямота в значительной степени является иллюзией, потому что основные результаты теории множеств можно доказать и без этой аксиомы. Аксиомы представляют собой простой перечень теоретических утверждений, которые позволяют вывести все важнейшие результаты неформальной теории множеств и при этом избежать парадоксов. Кроме блокировки парадокса Рассела эта аксиома интересна в другом отношении. Мир множеств может быть структурирован по стадиям конструирования множеств: V_0 – множество всех не-множеств, т.е. множество обычных объектов, V_1 – все объекты и множества всех объектов и т.д. Так вот, аксиома фундирования в присутствии других аксиом равносильна утверждению, что каждое множество есть член некоторого V_α, т.е. не выходит за рамки уже полученных конструкций. Эта идея Цермело увязывается им с понятием базиса – множества индивидов области (аксиома фундирования также имеет английское название *grounding*), и V_0 совпадает с базисом. Именно поэтому не существует нисходящей эпсилон-цепи. Это важная идея в понимании природы множества, и многие полагают, что данная идея встроена в концепцию стадийного конструирования множеств. Вполне возможно и другое понимание множеств, которое нарушает аксиому фундирования. Но это были бы "необычные множества", и во избежание парадоксов следует придерживаться только "обычных множеств". Мэдди в этой связи цитирует Булоса, который выражается еще категоричнее, когда утверждает, что "никакая область математики или теории множеств в общем не нуждается в множествах, которые не вполне обоснованы" [22], т.е. не упираются в базис.

Но именно последнее утверждение вызывает у многих исследователей сомнения в истинности аксиомы фундирования, поскольку остается открытым вопрос о том, являются ли все множества “вполне обоснованными”. Принимать или не принимать в качестве “законных” множеств не вполне обоснованные множества – вопрос сложный. Если мы хотим получить максимальную общность в трактовке понятия множества, мы не должны исключать не вполне обоснованные множества. С другой стороны, поскольку в математической практике такие множества не встречаются, их можно назвать “монстрами” или “патологиями”.

В любом случае, недавно Эжель (Aczel) предложил такую теорию множеств, в которой аксиома фундирования не справедлива [23]. Утверждается, что в применении к некоторым проблемам такая теория (*AFA – anti-foundation axiom*) работает гораздо лучше, чем система Цермело – Френкеля. Однако в рамках этой теории множеств не удается получить правдоподобные интуитивные модели. Так что аксиома фундирования, будучи менее ясной, чем предыдущие аксиомы, все-таки принадлежит к “классическому” набору аксиом.

Аксиома выделения

Следующей аксиомой является аксиома выделения, или аксиома подмножеств (английские термины – *axiom of subsets, axiom of separation*, немецкий термин – *Aussonderungsaxiom*), которая формулируется так:

> ***Если*** a ***есть множество и*** $\mathrm{F}(x)$ ***есть некоторое правильно построенное выражение в языке Цермело – Френкеля с единственной свободной переменной, тогда существует множество*** b, ***чьи элементы являются элементами*** a, ***для которых*** $\mathrm{F}(a)$ ***истинно***.

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow z \in x \,\&\, \mathrm{F}(z)].$$

Согласно наивной точке зрения на процесс образования множеств, каждое из них определяется некоторым свойством и само множество представляет собой объем этого свойства. Несмотря на “наивность”, это действительно единственно возможное представление о понятии множеств, если бы не было парадоксов, да и понятие свойства было более четким. Согласно определению Кантора, “Множество есть Множественность, которая мыслится как Единое”, и единство ему придает предполагаемое свойство. Аксиомы стремятся ограничить размер множества указанием на уже существующее множество.

Аксиома выделения, по замечанию Френкеля и Бар-Хиллела, является наиболее характерной чертой системы Цермело. Именно эта аксиома выражает радикальный отход от точки зрения, согласно которой каждому условию F(x) соответствует некоторое множество s, такое что $(\forall x)(x \in s \equiv \mathrm{F}(x))$. Известно, что эта точка зрения ведет к парадоксам, и Цермело предложил применять операцию образования множеств предметов, обладающих некоторым свойством, к уже имеющимся множествам. Аксиома выделения призвана ограничить предположение Кантора о том, что всегда можно собрать вместе в одну совокупность все вещи, удовлетворяющие данному осмысленному описанию (предположение, известное как неограниченная аксиома свертывания). Аксиомой выделения создаются лишь такие подмножества множества, существование которых гарантировано другими аксиомами. Таким образом, избегаются парадоксы Кантора и Бурали – Форти, поскольку невозможно образовать множество, скажем, всех кардинальных чисел исходя из определения свойства “быть кардинальным числом” и возможно образование лишь тех множеств, которые уже содержатся в некотором множестве. Аксиома также блокирует создание таких больших совокупностей, которые могли бы быть образованы исходя из свойства “быть множеством”, например такого множества, как $\{x : x = x\}$. В этом смысле аксиома является важным фактором в отказе в статусе множества таким большим совокупностям.

Хотя аксиома выделения играет важную роль в ограничении размера множеств и блокировании ряда парадоксов, она не дает того, что нужно математике. Если функция рассматривается как операция порождения множеств (отображение одного множества в другое), тогда аксиома требует, чтобы область значений функции была подмножеством области определения функции. Но во многих случаях это просто неверно. Данное обстоятельство позволяет оценить роль аксиомы более точно. Мэдди полагает, что в стремлении Цермело сохранить все, что можно, от наивной (неограниченной) аксиомы свертывания (определения множества через свойство), применением “правила правой руки” – один шаг до несчастья. Для того, чтобы избежать противоречия в некотором принципе, нужно ослабить принцип так, чтобы блокировать противоречие [24]. Цермело делает два ослабления неограниченной аксиомы свертывания: множество не может задаваться независимо, а всегда должно быть выделено как подмножество уже заданного множества; кроме того, свойство, по которому множество выделяется, должно быть определенным. Понятие определенности – одно из наиболее дискуссионных в философии математики и ее основаниях. В данном случае можно, следуя Сколему, полагать, что определенность означает формулу первого порядка, единственным нелогическим символом которой является “$\in$”.

Аксиома замещения

***Если** a **есть множество и** $F(x, y)$ **есть вполне определенное множество в языке Цермело – Френкеля, которое ассоциирует с каждым элементом** x **множества** a **единственный элемент** x^*, **тогда имеется множество** a^*, **чьи элементы есть как раз те множества** x^*, **которые ассоциируются формулой** $F(x, y)$ **с элементами** a.*

$$\forall x[\forall y[y \in x \Rightarrow \exists z(F(y,z) \,\&\, \forall w(F(y,w) \Rightarrow w = z))] \Rightarrow$$
$$\exists v \forall u[u \in v \Leftrightarrow \exists t(t \in x \,\&\, F(t,u))]].$$

Всякая новая аксиома предназначена для того, чтобы позволить существование тех чисел, которые появляются в неформальной теории множеств. Все приведенные выше аксиомы, кроме обсуждаемой нами сейчас аксиомы замещения, гарантируют существование таких ординальных чисел, как $\omega + 1$, $\omega + 2$ и т.д., но не любого множества, к которому они принадлежат. Другими словами, нет гарантии существования ординальных чисел за пределами $\omega + n$ для конечного n. Аксиома замещения позволяет определить функцию $f(n) = \omega + n$ над ω, так что гарантируется существование множества значений функции. Объединение этого множества с ω тогда дает представление $\omega + \omega$ и всех ординальных чисел второго числового класса. Аксиома замещения является более сильной аксиомой, чем аксиома выделения, поскольку с ее помощью можно развить общую теорию ординальных чисел. Вместе с тем в этой аксиоме присутствует ограничение, имеющее место в аксиоме выделения, а именно: множество образуется из области значений функции, определенной над уже заданным множеством.

Не входя в подробности, следует подчеркнуть, что принятие этой аксиомы демонстрирует общую тенденцию в принятии аксиом теории множеств. По выражению Булоса, “причины для принятия аксиомы замещения весьма просты: она имеет желаемые следствия и не имеет нежелательных”. Это типично внешнее оправдание введения аксиомы, поскольку ее полезность не мотивируется исключительно соображениями собственно теории множеств.

Гораздо большие множества могут быть образованы с помощью аксиомы множества-степени. Действительно, как утверждает Коэн, одной из причин принятия аксиомы бесконечности является ощущение того, что процесс добавления одного множества за другим не исчерпывает весь универсум. Но аксиома бесконечности есть наиболее простой, специальный способ порождения больших кардинальных чисел. А вот с помощью аксиомы множества-степени, нового и более мощного принципа, получается континуум [25].

Аксиома множества-степени

***Если** a **есть множество, тогда имеется множество** $P(a)$, **множество-степень от** a, **чьи элементы – это все подмножества множества** a.*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\,[z \in y \Leftrightarrow\ \forall w\,(w \in z \Rightarrow w \in x)].$$

В некотором смысле эта аксиома “выбивается” из ряда предыдущих аксиом, которые предназначены для того, чтобы ограничить размер получаемых множеств, дабы избежать парадоксов. Именно это соображение, с моей точки зрения, было положено Френкелем и Бар-Хиллелом в основу классификации аксиом на “конструктивные аксиомы общей теории множеств”, куда входит аксиома степени-множества, и “ограничения”, куда входят аксиома бесконечности, аксиома замещения, аксиома фундирования. Более поздние авторы (например, М.Тайлер) предпочитают другой порядок аксиом, что более естественно, потому что аксиома множества-степени, утверждающая существование для любого множества a множества $P(a)$, которое есть множество всех подмножеств a, не налагает никаких ограничений в отношении того, что множества должны быть сконструированы или определены. Нет ничего такого, что говорило бы о том, что членами $P(a)$ являются те, которые могут быть определены посредством выражений, выписанных в языке Цермело – Френкеля. Поэтому хотя существование $P(a)$ утверждается аксиомой множества-степени, его точное членство не определено этой аксиомой.

В некотором смысле возникновение теории множеств вообще обязано аксиоме множества-степени, или, точнее, идее, лежащей в ее основе. Установление Кантором важного результата, заключающегося в том, что для любого множества (конечного или бесконечного) кардинальное число $P(a)$ должно быть больше кардинального числа a, привело его к мысли, что возможно расширение понятия числа на бесконечные совокупности. Важность данной аксиомы видна уже из того, что без нее было бы невозможно доказать существование любого несчетного множества и, отсюда, ординальных чисел, которые не принадлежат ко второму числовому классу. С включением аксиомы множества-степени становится возможным доказать существование класса чисел второго порядка как множества, в то время как без этой аксиомы возможно доказать только существование всех членов указанного класса.

Аксиома выбора

Если** a **есть множество, все элементы которого – непустые множества и при этом ни одно из них не имеет общих элементов друг с другом, тогда имеется множество** c**, которое имеет точно один общий элемент с каждым элементом** a**.

$$\forall x [\forall y (y \in x \Rightarrow \neg (y = \varnothing)) \,\&\, \forall y \forall z (y \in x \,\&\, z \in x (y = z) \Rightarrow \neg (\exists w (w \in y \,\&\, w \in z))) \Rightarrow \exists u \forall y (y \in x \Rightarrow \exists z (z \in u \,\&\, z \in y \,\&\, \forall w (w \in u \,\&\, w \in y \Rightarrow w = z)))].$$

Аксиома выбора имеет статус, отличный от статуса других аксиом. Она является наиболее спорной аксиомой теории множеств, и при доказательстве теорем теории множеств указывается, получен ли этот результат с помощью аксиомы выбора или нет. Не очень ясен и статус данной аксиомы; сам Цермело считал ее логическим принципом, и этой точки зрения придерживаются также многие современные исследователи (например, Я.Хинтикка) [26]. Частичное оправдание этой точки зрения состоит в том, что многие находят аксиому выбора интуитивно правдоподобной. Проблема заключается в том, что эта на первый взгляд невинная аксиома имеет неожиданные и очень сильные следствия, многие из которых считаются противоречащими интуиции. По этой причине многие математики полагают, что следует избегать, если это возможно, использования данной аксиомы. В связи с этим говорят об “ограниченной теории множеств” без аксиомы выбора в противоположность “стандартной теории множеств”, которая содержит эту аксиому. Правда, Гедель показал, что если ограниченная теория непротиворечива, тогда непротиворечива и стандартная теория. Таким образом, аксиома выбора становится не более опасной, чем другие аксиомы.

* * *

Приведенный список аксиом не является каким-то каноническим. Возможны другие перечни и другие аксиомы. Например, есть список аксиом, именуемый аксиомами теории множеств Цермело – Френкеля – Сколема, в который входят следующие аксиомы: 1) аксиома экстенсиональности; 2) аксиома пустого множества; 3) аксиома неупорядоченных пар; 4) аксиома множества-суммы; 5) аксиома бесконечности; 6) аксиома замещения; 7) аксиома множества-степени; 8) аксиома выбора; 9) аксиома регулярности [27]. Наконец, имеет смысл привести исходный перечень аксиом, который появился в работе самого Цермело [28]: 1) аксиома экстенсиональности; 2) аксиома элементарных множеств (пустое множество, единичное множество, множество пары); 3) аксиома свертывания (Aussonderung); 4) аксиома множества-степени; 5) аксиома объединения множеств; 6) аксиома выбора; 7) аксиома бесконечности.

Математики и философы, как уже было отмечено, расходятся в понимании основной цели аксиоматизации теории множеств. Многие полагают (это стало "учебной" точкой зрения), что суть аксиоматизации состоит в ограничении области множеств, с которыми математики уже имели и имеют дело, с целью недопущения парадоксов.

Аксиоматика теории множеств позволяет "рассосать" фундаментальную философскую проблему относительно природы математики. В аксиоматической теории множеств противоположность платонистской и конструктивистской позиций практически невидима. Если математика, как полагает платонист, мыслится как открытие уже существующего универсума множеств, тогда аксиомы прямо утверждают существование множества, удовлетворяющего определенным условиям. Если же математика, как полагает концептуалист, является человеческим изобретением, тогда аксиомы утверждают способ порождения из одних заданных множеств других множеств. Математика в этом смысле представляет собой структуру, в которой непротиворечиво демонстрируется существование множества. Другими словами, аксиомы позволяют ограничить понятие множества, чтобы избежать парадоксов независимо от взгляда на природу математики.

Приведенные выше соображения о мотивации аксиом теории множеств говорят о том, что при этом в равной степени используются как философские, так и внутриматематические соображения, основанные на решении конкретных задач. В некотором смысле программа натурализации не представляется очень убедительной применительно к теории множеств, если ограничиться обсуждением изолированных результатов. Действительно, как видно из предыдущего изложения, большая часть аксиом мотивируется такими принципами, как ограничение размера множеств и итеративная концепция множества. Считать ли эти принципы внутриматематическими или же имеющими скорее философский характер – вопрос терминологии. Но все-таки следует признать, что такая же двусмысленность может быть отнесена и к принципу порочного круга, выдвинутому такими антагонистами, как Пуанкаре и Рассел. Вот при рассмотрении проблемы принятия или отвержения аксиомы конструируемости Геделя ($V = L$) натурализм становится более мотивированным. Но, пожалуй, еще более мотивированным при этом выглядит рассмотрение, которое зависит от набора задач, в частности проблемы континуума.

Примечания

1. См.: *Quine W.V.O.* Epistemology naturalized // Ontological Relativity and Other Essays. – N.Y.: Columbia Univ. Press, 1969.
2. См.: *Maddy P.* Naturalism in mathematics. – Oxford: Clarendon Press, 1997.
3. Ярким представителем такой позиции в последнее время выступал Ж.К.Рота, известный математик, который говорит в одной из своих статей о “зловещем влиянии математики на философию”.
4. См.: *Maddy P.* Believing the axiom, I // Journ. of Symbolic Logic. – V. 53. – No 2. – P. 481–511.
5. См.: *Moore G.* Zermelo’s axiom of choice. – Springer, 1982.
6. См. по этому поводу: *Fuller S.* Thomas Kuhn: Philosophical history for our times. – Chicago Univ. Press, 2001.
7. См.: *Boolos G.* The iterative conception of set // Jour. of Philosophy. – 1971. – V. 68. – P. 501.
8. См.: *Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levi A.* Foundations of set theory. – 2-nd ed. – Amsterdam, 1973. – P. 28.
9. *Russell B.* Principles of mathematics. – N.Y., 1903.
10. См.: *Rucker R.* Infinity and the mind. – Bantam Books, 1983. – P. 211.
11. См.: *Maddy P.* Naturalism in mathematics. – Oxford Univ. Press, 1997. – P. 42–43.
12. См.: *Russell B.* On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types // Essays in Analysis / Ed. by D.Lackey. – N.Y., 1974. – P. 153.
13. См.: *Tyler M.* The philosophy of set theory. – Basil Blackwell, 1989.
14. См.: *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М., 1966.
15. См.: *Рассел Б.* Введение в математическую философию / Пер. с англ. В.В.Целищева. – М.: Гнозис, 1996. – Гл. 13.
16. Там же. – С. 124.

17. Следует учесть, что полное понимание этого примера возможно, если иметь в виду определение числа Фреге – Рассела, а также теорию классов Рассела. Однако эти технические детали не являются препятствием для понимания сути примера.

18. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. – С. 124.

19. Там же. – С. 126.

20. Там же. – С. 133.

21. *Halett M.* Cantorain set theory and limitation of size. – Oxford Univ. Press, 1984. – P. 32.

22. *Maddy P.* Believing the axiom, I. – P. 481–511.

23. См.: *Aczel P.* Non-well-founded sets. – Stanford, 1988.

24. См.: *Maddy P.* Op.cit.

25. См.: *Cohen P.* Set theory and the continuum hypothesis. – Benjamin, Mass., 1966. – P. 65.

26. См.: *Hintikka Ja.* The principles of mathematics revisited. – Cambridge, 1996.

27. См.: *Davis Ph., Hersh R.* The mathematical experience. – Penguin, 1983. – P. 139.

28. См.: *Zermelo E.* Investigations in the foundations of set theory. 1908 // van Heijenort J. From Frege to Gödel. – Harvard Univ. Press, 1967. – P.

Институт философии и права
СО РАН, г.Новосибирск

Tselishchev V. **Set-theoretical axioms: motivation and the role in mathematical knowledge**

The article is devoted to description of epistemological motivation of Zermelo-Fraenkel axioms. The basic issue is the question that prevailed in recent discussions on philosophy of set theory – are axioms introduced with foundational aims or with internal to mathematics ones. It is shown that in many cases this distinction lacks any determinate meaning. Axioms being introduced as existential statements about sets are motivated by both aims. “Simple” axioms have clear philosophical justification as it has place in the case of null-set axiom. “Difficult” axioms like choice are subject of both philosophical and mathematical discussions. At the same time it must be admitted that the role of foundational considerations in compare with technical needs in introducing set-theoretical axioms is evaluated in lesser terms than in the past philosophy of mathematics.