Проблемы логики и методологии науки

ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ И ЦЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДИСКУРСА*

В.В. Целищев

Функции логики

В "Principia Mathematica" (1911–1913 гг.) Рассела и Уайтхеда в основания математики была положена логика второго и высших порядков. К концу 20-х – началу 30-х годов логическим основанием математики стала логика первого порядка. Это обстоятельство иногда принимает форму почти исторического нарратива, например как подведение итогов развития целого пласта науки – как "исторический триумф логики первого порядка над логикой второго порядка" [1]. Простое техническое различение двух видов логики состоит в том, что в логике первого порядка кванторы пробегают над индивидными переменными, в то время как в логике второго порядка кванторы пробегают не только над индивидными переменными, но также и над предикатными переменными. Однако при более близком рассмотрении оказывается, что два вида логики обладают различной идеологией в отношении фундаментальных целей как логики, так и оснований математики.

Поскольку обе логики претендуют на то, чтобы быть подлинными основаниями математики, следует иметь более точное представление о соотношении логики и математики, потому что многозначность термина "логика" делает многие представления о ее природе несколько расплывчатыми. Знаменитый логицистский тезис Фреге и Рассела, согласно ко-

* Работа поддержана Российским гуманитарным научным фондом (проект № 01–03–00131ю).

торому математика сводима к логике (Рассел афористически выразил его так: “логика есть юность математики, а математика – зрелость логики”), считается устаревшим, хотя в последнее время логицизм переживает вторую молодость [2]. Но утверждение, что математика есть логика, имеет и расширительный смысл, прямо не относящийся к логицизму. В определенном смысле каждый язык имеет присущую ему логику, которая характеризует понятие следования в этом языке. В таком расширительном смысле любая математическая теория может рассматриваться как логика некоторого языка, если при этом трактовать термины этой теории как логические частицы языка. При таком понимании логики ее концепции несут в себе содержание соответствующей теории [3].

В отношении содержания логической или математической теории существует несколько точек зрения. Рассел, сведя математику к логике, провозгласил к тому же отсутствие содержания в логике, что автоматически переносилось и на математику. Обе дисциплины были объявлены лишенными содержания – в том смысле, что утверждения в этих науках являются тавтологиями. Эта идеология была принята Венским кружком, но отвергнута, как и положено, большинством философов математики как крайне неправдоподобная точка зрения [4]. С другой стороны, постановка проблемы отсутствия содержания в логике оказалась крайне полезной при разработке и обосновании концепции логики первого порядка как оснований математики. Логика не имеет содержания в том смысле, что в аксиоматической теории она не вводит “с черного хода” в математическую теорию никаких дополнительных предположений, чем достигается полная ясность относительно того, какие именно объекты принимаются данной аксиоматической теорией [5].

Логика первого порядка не имеет содержания, по крайней мере в том смысле, что она служит лишь обеспечению правильного перехода от посылки к заключению в математическом размышлении, и этот переход осуществляется по вполне ясным правилам, относящимся к использованию логических констант. В этом отношении логика второго порядка гораздо менее ясна, потому что нет такого множества правил, которые бы дали все ее правильные результаты. Другими словами, логика первого порядка обладает полнотой, в то время как логика второго порядка неполна. С другой стороны, выразительные возможности логики второго порядка в качестве оснований математики намного богаче выразительных возможностей логики первого порядка. Тем не менее, по существующим ныне канонам, основания математики представляют собой логику первого порядка плюс аксиоматическая теория множеств. Для того чтобы понять парадоксальность сложившегося положения дел, следует рассмотреть более тщательно, каковы различия между этими двумя видами логики.

Фундаментальным понятием логики является понятие следования, которое призвано эксплицировать наши интуитивные представления о том, как надо совершать переход от одного утверждения к другому. Неявной посылкой интуитивных представлений выступает уверенность в том, что понятие следования должно быть универсальным, отражая структуру человеческого мышления в самых разных дискурсах – от математики до философии. Однако это представление оказывается неверным уже потому, что логика как таковая может пониматься по-разному. В значительной степени это связано и с различным пониманием аксиоматического метода. В последнее время принято учитывать также то обстоятельство, что распространенное понимание логики как математической логики не учитывает, что последняя является кодификацией математического теоретизирования, где в силу многих тонких особенностей математики фундаментальные понятия, имеющие хождение в философии (ввиду традиционной связи философии и логики), могут претерпеть значительную модификацию в математических контекстах. Другими словами, надо различать применение логики в математике и применение логики в обычном дискурсе.

Действительно, при использовании аксиоматического метода аксиомы часто имеют нелогический характер, будучи систематизацией определенной области математики или же какой-либо иной научной отрасли. Если в естественных или гуманитарных науках подобного рода систематизация является едва ли достижимым идеалом, то в математике она обретает плоть. Это в самом деле идеал, потому что если мы имеем полную аксиоматическую систему в изложенном выше смысле, то для получения нового знания требуется лишь извлечение логических следствий из аксиом. В некотором смысле такая программа является воплощением рационализма в философском смысле, поскольку, ограничиваясь логическими следствиями из аксиом, можно забыть о реальности.

Здесь есть одно противоречие, которое касается природы аксиом. Если говорить в духе рационализма о врожденном знании, тогда аксиомы должны быть простыми в некотором смысле. Однако трудно ожидать, что полная система аксиом, представляющая какой-то фрагмент реальности во всем его богатстве, будет состоять из простых истин. В научной практике такого никогда не случается, хотя и продолжает оставаться не-достижимым идеалом. Так, уравнения Максвелла, из которых следует вся классическая электродинамика, определенно непросты. Представление их в четырехмерном формализме Минковского упрощает их, но вряд ли этот полученный результат в большей степени интуитивно понятен и ясен.

Содержательные, или эмпирические, истины, нашедшие отражение в аксиомах, могут там присутствовать явно или же скрыто. Явное присутствие имеет место в интерпретированных аксиомах, а неявное – в неинтерпретированных.. Если все теоремы выводятся из аксиом чисто логическими средствами, тогда мы имеем дело с чисто логической системой аксиом, независимо от того, являются ли аксиомы интерпретированными или нет. Все дело в значении логических констант, которое должно оставаться постоянным при любых интерпретациях нелогических констант. Ясно, что такое положение дел связано с желанием, чтобы правила вывода были правилами рекурсивными или вычислимыми. Такое понимание функций логики проистекает из взгляда, согласно которому логика представляет собой формальный каркас, включающий в себя отношения (следования) между содержательными утверждениями. "Здесь мы имеем пример роли логики, – пишет Я.Хинтикка, – которая по вполне понятным причинам укоренилась в умах большинства моих сотоварищей философов, логиков и математиков. Логика есть изучение отношений логического следования, т.е. отношений импликации. Ее конкретное проявление заключается в способности выполнять логические выводы, т.е. делать дедуктивные заключения. Я буду называть это *дедуктивной* функцией логики" [6].

Теперь следует различить аксиоматизацию нелогических систем, в которой аксиомы представляют собой содержательные утверждения, а из них выводятся другие содержательные утверждения, и аксиоматизацию логических систем, в которых мы имеем дело с логическими истинами. Несмотря на использование одного и того же слова (что часто случается в развитии науки и философии), между двумя его смыслами имеется фундаментальное различие. Аксиоматизация логики была изобретена специально как кодификация формальных правил, которые желательны при формализации математического дискурса. Это метод рекурсивного перечисления всех логических истин, которые только можно получить из определенных (логических) аксиом в некотором формальном языке. Различение имеет смысл и в связи с понятием намеренной интерпретации: нелогические аксиоматики практически всегда имеют намеренные интерпретации, в то время как вопрос об интерпретациях подобного рода для логических аксиоматик несколько искусственен.

Обычно считается, что цель логического вывода состоит в том, чтобы при переходе от утверждения к утверждению сохранялась истинность утверждений. Но одно дело сохранять логические истины, и совсем другое – сохранять содержательные истины. Содержательные истины представляют собой эмпирические истины о мире, т.е. фактические истины, в то время как логические истины имеют совсем иное концептуальное происхождение. Логика, будучи на протяжении многих веков связанной с метафизикой, легко благословляет вывод от материальной импликации $p \supset q$ (где p и q – содержательные утверждения) к модальному утверждению о необходимости $N\,(p \supset q)$, вывод, который не проходит в случае содержательных утверждений. В этом случае логический вывод не будет гарантировать сохранение истины. В некотором смысле вывод в нелогической системе является подлинным выводом, в то время как логический вывод является "сегментом рекурсивного перечисления истин".

Однако история логики и математики сложилась так, что это важнейшее различие было смазано, если можно так выразиться, контингентным событием создания логики первого порядка. Прежде всего следует отметить, что аксиоматической системой, по поводу которой возникли дискуссии, приведшие в конечном счете к выделению в логике языка первого порядка, была аксиоматическая система теории множеств Э.Цермело. Поскольку благодаря усилиям Фреге и Рассела теория множеств рассматривалась как часть логики, содержательная аксиоматическая система Цермело как основание теории множеств (и всей математики) во многом была подобна аксиоматической логической системе. (Справедливости ради надо сказать, что различение, о котором мы сейчас говорим, родилось лишь совсем недавно и во времена Цермело о нем не могло быть и речи.) Аксиоматическая система теории множеств Цермело была подвергнута резкой критике, и поэтому Цермело (наряду с другими исследователями) предпринял значительные усилия для прояснения логики, которая лежит в основе теории множеств. С одной стороны, это были усилия, направленные на построение содержательной аксиоматики, а с другой стороны, исходя из потребностей теории множеств была выделена логика первого порядка как базовая логическая система. Это привело к отделению логики первого порядка от логик высших порядков, в которых допускается квантификация над такими абстрактными сущностями, как предикаты, классы, множества и отношения.

Официально логика первого порядка родилась в 1928 г., когда вышла книга Д.Гильберта и В.Аккермана "Основы теоретической логики" [7], где этот фрагмент логики был сформулирован явным образом. Ряд обстоятельств сделал логику первого порядка средством логического вывода в математике. Прежде всего, как видно из всех учебников, где излагается предикатная логика, или кванторная логика (другие названия логики первого порядка), кванторные формулы используются как формализация обыденного языка. У.Куайн в ряде своих работ [8] назвал этот процесс "регламентацией обыденного языка", что, впрочем, неудивительно, поскольку для него "first-order logic is logic enough". Коль скоро обыденный язык подвергается относительно удовлетворительной формализации, логика первого порядка стала считаться естественным инструментом не только математического, но и обыденного мышления.

Далее, «легко видеть, почему логика первого порядка кажется мечтой логика. Прежде всего, эта логика допускает полную аксиоматизацию. С первого взгляда это кажется эффективным исполнением надежд Гильберта и др. на существование непроблематичной и полностью аксиоматизируемой базисной логики. Существование такой логики было на самом деле одной из предпосылок того, что ныне известно как программа Гильберта – программа доказательства непротиворечивости некоторых математических теорий, в первую очередь арифметики и анализа, путем демонстрации того, что из их аксиом невозможно формально вывести противоречие. Если бы используемая при этом логика была неполна, тогда весь проект терял свой смысл, потому что могло бы существовать недоказуемое противоречие среди логических следствий этих аксиом. К счастью, Геделем в 1930 г. была показана полная аксиоматизируемость логики первого порядка. Больше того, было показано, что логика первого порядка допускает все виды приятных металогических результатов, таких как компактность (бесконечное множество предложений непротиворечиво, если и только если непротиворечивыми являются все его конечные подмножества), направленная снизу вверх теорема Левенгейма – Сколема (непротиворечивое конечное множество предложений имеет счетную модель), теорема отделимости (если σ и τ – непротиворечивые множества формул, но $\sigma \cup \tau$ противоречиво, тогда для некоторой "отделимой формулы" в S в стандартном словаре σ и τ мы имеем $\sigma \Rightarrow S$, $\tau \Rightarrow \neg S$), интерполяционная теорема (если $\Rightarrow (S1 \supset S2)$ нетривиально, тогда для некоторой формулы I в общем словаре $S1$ и $S2$, $\Rightarrow (S1 \supset I)$, $\Rightarrow (I \supset S2)$), теорема Бета (неявная определимость влечет за собой точную определимость), и т.д. Короче говоря, логика первого порядка кажется не только базисной, но и настоящим раем для логиков» [9].

Однако этот "рай" оказался несовершенным, поскольку значительное число математических концепций не может быть выражено на языке первого порядка. К таким концепциям относятся математическая индукция, вполне-упорядочение, конечность, кардинальность, мощность множества и др. Сразу же следует заметить, что все эти понятия выразимы на языке второго порядка. Между тем подобная функция является прерогативой логики, и в этом смысле логика второго порядка более предпочтительна для математического теоретизирования. Хинтикка называет такую функцию логики дескриптивной и полагает, что "многие интересные феномены в основаниях математики становятся более понятными в свете трений, которые часто очевидны между дескриптивной и дедуктивной функциями логики в математике".

Дедуктивная функция логики реализуется в теории доказательств, а дескриптивная – в теории моделей. Рассмотрение условий истинности в теории моделей, или логической семантике, является более фундаментальным шагом в осмыслении природы логики, чем рассмотрение чисто дедуктивной структуры. Действительно, логические выводы основаны на значении входящих в них символов. Но трактовка логических связок на этом пути опять-таки не дает нам фундаментального понимания их природы. А вот в теории моделей мы можем получить такую трактовку, рассмотрев отношение предложения p к множеству $M(p)$ его моделей. Предполагаемый вывод от $p1$ к $p2$ в этом случае общезначим, если и только если $M(p1) \subseteq M(p2)$. В этом смысле реальная логика, используемая в формализованном представлении мышления, основана на теоретико-модельном значении логических констант.

Две концепции логики

Различение двух описанных выше функций логики на самом деле является следствием двух различных логических традиций, возникших во второй половине XIX в. [10]. Первая традиция восходит к работам Дж. Буля, Ф.Шредера и К.Пирса, которые усматривали основную мотивацию своих исследований в прослеживании сходства логики с алгеброй (почему их дисциплина и была названа "алгеброй логики", а вся традиция – "алгебраической" [11]). В частности, они обратили внимание на аналогии между алгебраическими операциями типа сложения и умножения и видами логического вывода. Общая цель этой школы состояла в разработке такого исчисления, которое было бы пригодно для использования в различных областях математики. Булева алгебра, фактически положившая начало этому направлению, представляет собой абстрактную алгебру наряду с теорией групп или теорией полей. Обычно построение формальной системы начинается с выделения некоторого набора операций, анализ которых позволяет прийти к некоторой абстрактной структуре. В результате получается множество аксиом, часть из которых объявляются “законами мысли”.

Вторая традиция восходит к Дж. Пеано и Г.Фреге, в чьих работах главное место занимает концепция логики как основы для математики. Продолжателями этой традиции стали Рассел, Виттгенштейн, Венский кружок, и, пожалуй, самым стойким из современных ее сторонников является У.Куайн, который до конца своей жизни отрицал важность теории моделей. Основным положением, отстаиваемым в рамках этой традиции, является утверждение, что метаязык невозможен, что нельзя выйти за пределы языка. Если говорить менее метафорично, то это означает, что переинтерпретация языка невозможна, как невозможно выражение семантики языка в самом языке. Все, что можно сделать в логической теории, – это опереться на синтаксические конструкции. Исходной целью данного направления была кодификация логики, лежащей в основе всего рационального дискурса. Такой универсальный язык должен быть применимым во всех контекстах без того, чтобы в дальнейшем быть снабженным какой-либо интерпретацией.

Различие между двумя указанными направлениями можно выразить следующим образом. Алгебраическое направление имело дело с алгебраическими структурами, а также с теми приемами и теоретизированием, которые были общими при изучении этих структур. Логистическое же направление (как часто его называют в связи с логицизмом Фреге и Рассела) имеет дело с универсальным теоретизированием, нерелятивизованным ни к какому контексту. Хинтикка увязывает эти две традиции с фундаментально различными представлениями о природе отношения языка и его логики к реальности. В рамках первой традиции, продолженной Левенгеймом, Геделем и Тарским, язык рассматривается как *исчисление*. Этот термин призван высветить особенности такого подхода к логике, при котором возможны различные переинтерпретации языка, использование концепции истины, концепции метаязыка и многих интуитивных теоретико-модельных представлений в систематической логической теории, например идеи Э.Бета и Я.Хинтикки представлять формальные доказательства как неудавшиеся попытки построить контрпример [12]. Вторую традицию Хинтикка охарактеризовал так: язык как универсальный медиум. Именно универсальность устанавливает демаркацию между логистическим подходом и теорией моделей.

В техническом плане это проявляется следующим образом. При логистическом подходе для представления предикатов, отношений и индивидных констант используется понятие переменной. Индивидная область квантификации не ограничивается каким-либо специфическим образом, предикатные переменные охватывают область всех свойств, и то же касается отношений. Поскольку главными “действующими лицами” выступают переменные, логические связки и кванторы, все конструируемое в таком словаре является по определению логическим. При теоретико-модельном подходе вместо понятия переменной используется понятие схематической буквы. Этим буквам придается различная интерпретация в различных моделях в теоретико-модельной семантике. Некоторые языки имеют интерпретации одновременно в нескольких моделях. Как видно, в логистическом направлении область значений переменных охватывает все объекты, в то время как в алгебраическом направлении переменные пробегают над неспецифицированной, но фиксированной областью объектов.

Кроме того, что имеются различия в области квантификации, два направления различаются между собой и способом понимания этой концепции. Фреге и Пеано предложили такое понятие, которое практически совпадает с современным понятием квантора. В частности, универсальный квантор Фреге – это квантор $\forall$, но при этом не предполагается ограничений на область квантификации. А вот определение Пирса является скорее алгебраическим: экзистенциальный квантор определяется как теоретико-множественное объединение, а универсальный квантор – как теоретико-множественное пересечение. Идея представления экзистенциального квантора как дизъюнкции, а универсального квантора как конъюнкции в случае конечной области квантификации общеизвестна со времени Виттгенштейна. Но вот в случае бесконечной области следует разработать понятия бесконечных конъюнкции и дизъюнкции. Дальнейшие исследования Гильберта обнаружили связь этого вопроса с аксиомой выбора и новым постулатом, который был им выдвинут, а именно, с *трансфинитной аксиомой*. Эта новая аксиома позволила заменить кванторами бесконечные конъюнкцию и дизъюнкцию. В более общем плане следует сказать, что в теории инфинитарных языков логики изучают различные расширения языков первого порядка. Такого рода исследования распадаются на две ветви. Во-первых, как было упомянуто, логики вводят бесконечные дизъюнкции и конъюнкции. Во-вторых, разрабатываются теории с бесконечными последовательностями кванторов.

Следует упомянуть также, что ряд исследователей выделяют еще и третью концепцию логики, называя ее математической школой, к которой причисляют таких математиков, как Дедекинд и Гильберт [13]. Цель этого направления состоит в том, чтобы аксиоматизировать различные ветви математики. В противоположность алгебраическому подходу, в рамках которого осуществляется аксиоматизация сразу для нескольких систем, математический подход предполагает осуществление аксиоматизации конкретной области. Правда, надо оговориться, что Гильберт может быть причислен к любой из школ, что и делается различными исследователями. Больше того, этот математик выступает главной фигурой при аргументации в пользу выделения определенной концепции логики. Например, для Хинтикки именно творчество Гильберта является образцом теоретико-модельного подхода к логике [14].

Универсалистский подход более привлекателен для философов, поскольку он реализует многие из неявных представлений традиционной метафизики. В этом отношении уместно упомянуть тезис Рассела, согласно которому метафизика многих философов в истории философии неявно определялась принятой ими логикой. Что касается понимания логики как исчисления, или теоретико-модельного подхода, то с точки зрения философов она в значительной степени является математической теорией. “Теория моделей есть математическая теория, – пишет М.Резник. – Она начинает с аксиом, которые в большинстве работ по теории моделей понимаются интуитивно и которым придается точная форма. Таким образом, теория моделей может быть сформулирована как аксиоматическая математическая теория точно в таком же духе, как и теория групп или теория чисел. Когда она сформулирована таким образом, она может рассматриваться как отрасль аксиоматической теории множеств” [15].

Однако взгляд на теорию моделей как чисто математическую теорию считается рядом исследователей результатом непонимания того, что собственно включено в теоретико-модельный подход [16]. Во-первых, каждая математическая теория развивает свою собственную теорию моделей. Во-вторых, именно результаты, полученные, скажем, в теории моделей модальной логики, теории моделей теории групп, теории моделей теории множеств, являются вкладом в современную логику. Будь теория моделей только математической теорией, пришлось бы признать теорию моделей теории моделей, что выглядит неестественно.

Хинтикка признает, что кое в чем Резник все-таки прав, поскольку теоретико-модельные аргументы опираются на теоретико-множественные предпосылки. Но это не делает теорию моделей частью теории множеств, потому что не существует множества таких аксиом теории множеств, которые были бы пригодны для всех теоретико-модельных построений. Что еще более важно, в то время как среди исследователей, занимающихся теорией множеств, существуют значительные разногласия относительно того, какого рода все более сильные аксиомы теории множеств надо принимать, консенсус находится часто на пути теоретико-модельных рассмотрений.

Но все-таки, несмотря на такую аргументацию, остается еще след “посылки принцессы Маргарет”. Не все философы готовы к тому, чтобы полностью математизированная теория заняла место того, что ранее было прерогативой философских рассмотрений. Философы были в смятении от того, что все ключевые теоремы логики, которые, по предположению, имели дело с мышлением, оказались алгебраическими теоремами.

Логическое следование

Рассмотрим фундаментальное понятие логического следования, которое обычно считается универсальным для всех логических языков. Между тем это понятие имеет весьма различные характеристики в логике первого порядка и логике второго порядка. В определенном смысле две эти логики, или два логических языка, отличаются друг от друга как раз понятием следования, свойственным каждому из языков. Глубинное различие заключается в разных целях логического исследования [17].

Прежде всего отметим, что имеется два понятия следования: семантическое, или модальное, и дедуктивное. Семантическое понятие следования определяется таким образом: предложение Ф есть логическое следствие множества Г предложений, если невозможно, чтобы при истинности каждого члена Г было ложным Ф. Другими словами, Ф истинно при каждой интерпретации, при которой каждый член Г истинен. Обычно такое понятие следования полагается более интуитивным и используется в начальных курсах по логике (см., например, “канонический” текст С.Клини “Математическая логика”, где теория доказательств предваряется теорией моделей). Дедуктивное понятие следования определяется следующим образом: Ф есть следствие Г, если имеется вывод Ф из посылок в Г. Теорема полноты заключается в том, что предложение Ф первого порядка есть теоретико-доказательное следствие множества Г предложений первого порядка, если и только если Ф есть теоретико-модельное следствие Г. Таким образом, для языка первого порядка семантическое следование совпадает по объему с дедуктивным.

Именно полнота логического исчисления, которая полагается некоторым "идеалом", является причиной отождествления двух понятий логического следования. Между тем семантическая концепция следования призвана выразить смысл, в котором теоремы некоторой математической теории представляют теорию об определенном роде объектов, – скажем, теоремы арифметики – теорию о натуральных числах. Аксиомы теории должны при этом характеризовать ту область математических объектов, которая была целью формализации. Другими словами, интерпретация формальной теории должна быть намеренной, и, больше того, все интерпретации подобного рода должны быть изоморфными, поскольку они говорят "об одном и том же". Только так гарантируется сохранение истины, которое является целью логического следования. Что касается дедуктивного понятия следования, то оно призвано прояснить, в каком случае математики полагают тот или иной вывод "законным", и делается это за счет выявления посылок заключения.

Соотношение двух видов логического следования, согласно Дж. Коркорану [18], таково: если Ф есть следствие Г в семантическом смысле, то заключение Ф "уже логически неявно присутствует" в посылках. В определенном смысле заключение будет излишним, потому что при этом не получается новой информации. Это понятие резко контрастирует с дедуктивным, потому что существует возможность того, что Ф неявно содержится в Г, даже если дедукция Ф из Г невозможна. Предположим, что доказано, что Ф есть семантическое следствие Г, но доказательство включает в себя некоторое погружение структур Г в более богатую структуру. Такая ситуация вполне обычна для математики. В подобных случаях может быть показано, что теорема есть семантическое следствие соответствующих аксиом второго порядка, но не дедуктивное следствие. В типичном случае теорема есть дедуктивное следствие этих аксиом вместе с некоторыми фактами относительно фоновой теории. Пусть $\sum$ будут принципами фоновой теории, используемой для установления Ф. Тогда математик устанавливает $(\Gamma + \sum) \vdash \Phi$, и это показывает, что $\Gamma \models \Phi$, и вероятно, что Ф не оправдано на основании только лишь Г. Вероятно даже, что $\Gamma \nvdash \Phi$.

Приведенный пример говорит о том, что различие двух концепций логического следования тесно связано с различием логики первого порядка и логики второго порядка. Но последнее различие само по себе важно и имеет также и другие корни. Действительно, при рассмотрении проблем оснований математики едва ли не самым важным обстоятельством является язык формализации содержательных математических утверждений. Речь идет о предпочтении языка первого порядка по сравнению с языками высших порядков, в частности с языком второго порядка. Стандартный взгляд на это обстоятельство представлен знаменитым афоризмом У.Куайна: “Логика второго порядка является теорией множеств в овечьей шкуре” (см., например, его “Философию логики” [19]). Апеллирование к “волку в овечьей шкуре” оправданно прежде всего с точки зрения онтологических допущений: неясные онтологические интенсиональные сущности языка второго порядка менее предпочтительны, чем явные экстенсиональные онтологические допущения теории множеств. Конечно, такие предпочтения оправданны лишь в той мере, в какой справедлив другой афоризм Куайна: “Нет сущности без тождества” (английский вариант еще более афористичен: “No entity without identity”). Следует напомнить, что в “Principia Mathematica” Рассела и Уайтхеда основания математики сформулированы в языках высших порядков, а четкое разделение ролей языка первого порядка и языков высших порядков можно обнаружить в работе “Основы теоретической логики” Гильберта и Аккермана, опубликованной в 1928 г. Часто по поводу многих философских вопросов складывается “каноническое представление”, иногда мало отвечающее реальному становлению вопроса. Поэтому желательно возвращение к истокам – либо путем чисто исторического рассмотрения, либо путем более тщательного анализа посылок этого представления. Именно такова ситуация с предпочтением языка первого порядка.

Окончательно важность языка первого порядка в качестве орудия построения оснований математики стала ясна после доказательства Геделем в 1930 г. теоремы полноты для логики первого порядка. Полнота и в самом деле является в высшей мере желательным свойством формальной системы, в которой формулируются содержательные истины математики. Отсутствие этого свойства у языка второго порядка подорвало претензии этого языка на то, чтобы быть базисным языком оснований математики. Сегодня стандартный взгляд заключается в том, что основания математики представлены логикой первого порядка и теорией множеств. Этот взгляд, как уже было сказано, связан со многими философскими представлениями. Одно из них опять-таки связано с предложенной Куайном стратегией постепенного увеличения онтологической тяжести утверждений в математике. Логика первого порядка не имеет экзистенциальных утверждений, а теория множеств постепенно вводит такие утверждения в математику. В “Теории множеств и ее логике” Куайн поначалу даже вводит виртуальные классы, перед тем как сделать подлинные экзистенциальные утверждения [20].

Эти утверждения о существовании все более обширных множеств становятся все более далекими от стандартов оправдания экзистенциальных утверждений, так что сама куайновская стратегия разделения на “экзистенциальную часть” теории множеств и “неэкзистенциальную часть” логики первого порядка оказывается сомнительной. Поэтому логика второго порядка с ее экзистенциальными утверждениями интенсиональных сущностей может оказаться не менее плодотворным основанием математики. К тому же появляются весьма интересные языки, которые не так-то легко классифицировать с точки зрения дихотомии “первый порядок / второй порядок”. Например, “дружественная независимая логика”, предложенная Я.Хинтиккой в качестве плодотворного орудия построения оснований математики, обладает выразительными возможностями логики второго порядка, представляя в то же время по сути своей логику первого порядка [21].

Логика второго порядка

Таким образом, представляет интерес вопрос о том, может ли логика второго порядка служить в качестве основания математики. Вопрос этот особенно интересен в связи с тем, что одно из самых важных сегодня направлений в основаниях математики – структурализм – напрямую связано с логикой второго порядка и обоснованность претензий структурализма на то, чтобы быть адекватной философией математики, напрямую зависит от того, является ли логика второго порядка адекватным орудием исследования оснований математики (см. по этому поводу работу С.Шапиро “Основания без обоснования” [22]).

Прежде всего следует отметить, что различие между экстенсиональными и нтенсиональными сущностями не является решающим для разделения языков на порядки. Хотя интерпретированный язык называется второпорядковым или языком высшего порядка, если его переменные пробегают над отношениями, пропозициональными функциями, свойствами, классами или множествами сущностей, над которыми пробегают переменные логики первого порядка, природа сущностей не имеет значения для характеристики логики второго порядка.

Отличительной характеристикой порядка языка является размер области квантификации. Язык второго порядка может быть получен добавлением к дедуктивной системе первого порядка расширения аксиом с кванторами типа $\forall X(\Phi(X)) \to \Phi(Y))$ и аксиомной схемы свертывания $\exists X \forall x (Xx \equiv \Phi(x))$ для каждой формулы Φ, не содержащей X

свободно. Но основное различие языков первого и второго порядков заключается в семантике. Областью переменных первого порядка могут быть натуральные числа.

В стандартной семантике логики второго порядка переменные пробегают над совокупностью всех подмножеств области. Хотя для такой семантики все доказуемые утверждения являются истинными, в ней не реализуются полнота и компактность. Все бесконечные структуры категоричны. Преимуществами логики второго порядка со стандартной семантикой являются ясность, соответствие интуиции. При фиксации области квантификации переменных первого порядка понятия “все свойства” или “все подмножества”, играющие решающие роль в основаниях математики, обретают твердый смысл. По этой причине многие считают, что логика второго порядка является более подходящим кандидатом для оснований математики, чем традиционный базис – логика первого порядка плюс теория множеств. Сторонники же логики первого порядка утверждают, что понятие переменной, пробегающей над всеми свойствами фиксированной области, в высшей степени неясно, а потому логика второго порядка вряд ли может считаться хорошим базисом. Для того, чтобы разрешить этот спор, требуется рассмотреть дополнительные аргументы в пользу логики второго порядка.

Прежде всего нужно понять, в каком смысле логика второго порядка является логикой. В общепринятом смысле слова логика абстрагируется от специфики рассматриваемого предмета и представляет собой теорию о том, что истинно и что ложно. Если руководствоваться именно таким критерием, тогда под рубрику логики определенно подпадают истинностные функции. Но вот введение кванторов усложняет критерий логики. Действительно, уже логика первого порядка требует кроме понятий истины и лжи два дополнительных понятия – истинности предиката об объекте и самого объекта. В этом отношении логика второго порядка кажется даже более экономной, поскольку там требуется еще только одно дополнительное понятие – значение предикатной переменной. Таким образом, с точки зрения приведенного критерия логика второго порядка определенно является логикой в неменьшей степени, чем логика первого порядка. Действительно, раз уже в логике первого порядка допущено некоторое дополнение, нет никаких априорных возражений против дальнейших допущений и усложнений.

Однако в качестве главного возражения против логики второго порядка выдвигается обвинение в том, что упомянутое выше дополнение выводит эту самую логику из семейства логик вообще. Знаменитый (как и все афоризмы Куайна) афоризм: “Логика второго порядка есть волк (теория множеств) в овечьей (логика) шкуре” [23] – является скорее метафоричным, нежели точным выражением ситуации, сложившейся в отношении логики второго порядка. И поэтому буквальное толкование афоризма попросту неверно. Как отмечает, наряду с другими, Дж. Аззуни [24], логика второго порядка не является, строго говоря, теорией множеств, если под последней подразумевается теория множеств первого порядка, поскольку модели для этих систем не совпадают. Действительно, как известно, теория множеств первого порядка имеет нестандартные модели, в которых “$\in$” не является отношением членства. Различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка проявляется, если прибегнуть к терминологии Куайна, в онтологическом плане, – имеется в виду его критерий существования “быть – значит быть значением переменной”. В случае одной переменной предикация Pa свойства P сингулярному термину a не предполагает, что выражение Pa имеет в качестве онтологических допущений объем предиката P. Онтологические допущения, как следует из критерия существования, определяются областью квантификации. Именно по этой причине отношение членства “$\in$” не предполагается в использовании нотации “Pa”. Но как только мы переходим к квантификации предиката, предикация становится равносильной отношению членства, и, больше того, по сути она становится логической константой. В определенном смысле логика второго порядка действительно становится равносильной теории множеств [25].

Дело в том, что понятие стандартной модели для языка второго порядка предполагает, что переменные для одноместного предиката должны пробегать над всеми совокупностями объектов в универсуме индивидов. Это предположение существенно, поскольку логика второго порядка не является рекурсивно аксиоматизируемой. Что касается рекурсивно аксиоматизируемых фрагментов, то они будут представлять собой класс обобщенных моделей Генкина, таких что теоремы фрагмента и только они истинны для всех моделей этого класса. Но эти модели не являются стандартными. Если бы мы были ограничены рекурсивно аксиоматизируемыми системами, мы не могли бы сказать, что модели для оценки логической истины являются стандартными. Но это можно сделать, если синтаксическую операцию предикации представить в виде отношения членства (в виде логической константы) и позволить предикатной переменной пробегать над всеми подмножествами универсума индивидов. Таким образом, выражение $\exists F\,(Fa)$ вынуждает нас считать одним и тем же значения, которые принимает предикат, и указание сингулярным термином a. Суть аргументации Аззуни состоит в том, что логика второго порядка оказывается если не теорией множеств, то двухсортной первопорядковой теорией объектов и их классов. Теоретико-множественные модели языков второго порядка и интерпретации этих языков приписывают значениям предикатных переменных сущности одного сорта [26].

Так где же лежит различие между логиками первого порядка и второго порядка? Как замечает Д.Босток, сам по себе факт, что в одной теории пишется Fa, а в другой теории – $a \in F$, означает лишь различие в нотации, что имеет место, скажем, в случае стандартной и польской нотации. Две логики могли бы различаться в отношении того, что считать правильно построенной формулой [27]. Действительно, в логике второго порядка такое соединение символов, как ab или FG, не считалось бы правильно построенной формулой, в то время как в первопорядковой теории множеств $b \in a$ или $G \in F$ являются правильно построенными формулами. Правда, во избежание парадоксов такие формулы можно признать ложными, а то и вовсе отказать им в статусе правильно построенных формул. Так что различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка лежит в их семантиках.

В частности, в двух этих случаях по-разному работает понятие общезначимости. Формальное определение общезначимости одинаково для обеих логик: формула общезначима, если и только если она истинна при всех интерпретациях входящих в нее символов. В это определение входит намеренная интерпретация логических связок. В логике первого порядка вводится специальная интерпретация кванторов, при которой они пробегают над всеми объектами. В логике второго порядка в дополнение постулируется специальная интерпретация для кванторов второго уровня, т.е. предикатных кванторов, обобщающая все способы, которыми предикат может быть истинен для одних объектов и ложен – для других. Именно это дополнительное условие и создает различие между двумя логиками. Оно ответственно за то, что в то время как логика первого порядка может быть снабжена полным множеством аксиом и правил, логика второго порядка лишена этого. Кроме того, этот же факт ответственен за то, что многие важные понятия в логике первого порядка неопределимы и в то же время они определимы в логике второго порядка.

Приведем иллюстрацию этого обстоятельства. Известно, что тождество неопределимо в языке первого порядка, т.е. если этот язык имеет нормальные модели, в которых “=” интерпретируется как тождество, тогда он также имеет и “ненормальные” модели, в которых “=” интерпретируется другим образом. В логике второго порядка мы имеем определение $a = b \leftrightarrow \forall F(Fa \leftrightarrow Fb)$, которое интуитивно правдоподобно. Таким образом, дополнительный вид квантификации в логике второго порядка придает ей большие выразительные возможности, но в то же время лишает ее компактности или конечной аксиоматизируемости. Как уже было сказано, те же выразительные возможности равносильны теории классов, представленной двухсортной теорией. Различие заключается только лишь в онтологических допущениях, поскольку многие полагают логику второго порядка нейтральной в отношении онтологии, считая, что она избегает допущения классов как сущностей.

При сопоставлении логик первого порядка и второго порядка следует обратить внимание на то, в какой степени они естественны. Сторонники "регламентации обыденного языка" логикой первого порядка (например, Куайн) считают, что она покрывает огромную область структур обыденного языка. И только некоторые "тонкости", которые не по плечу логике первого порядка, требуют логики второго порядка. Но вот подобного рода "тонкости" играют огромную роль, скажем, в математике. Дедекинд показал, что постулаты элементарной арифметики натуральных чисел дают категоричные структуры (все модели этих постулатов имеют одну и ту же структуру, т.е. структуру натуральных чисел). То же сделал Кантор для действительных чисел. Но оба этих доказательства опираются на второпорядковое понимание данных постулатов, ибо известно, что никакое множество первопорядковых постулатов, которые имеют бесконечные модели, не может быть категорическим. Так что приемлемость этих доказательств ведет к признанию необходимости логики второго порядка.

Другой пример необходимости логики второго порядка таков [28]. Пусть имеется бесконечное число посылок типа

A не есть родитель *B*;
A не есть родитель родителя *B*;
A не есть родитель родителя родителя *B*;
…………………………………………….

Из этих посылок следует заключение

A не есть предок *B*.

Такой вывод вполне значим для тех, кто понимает содержание понятия "предок". В логике первого порядка этот вывод не является значимым, поскольку логика первого порядка компактна. Компактность означает, что если утверждение следует из бесконечного множества посылок, тогда оно должно следовать из конечного подмножества множества этих посылок.

Одна из главных причин спора между сторонниками логики первого порядка и логики второго порядка заключается в том, возможно ли достижение категоричности, поскольку именно это свойство является главным признаком соответствия интуиции: формальная система должна описывать объективный мир математических сущностей. Логика второго порядка категорична, но многие полагают понятие переменной над всеми свойствами формально неточным. Однако вполне возможно сделать понятие переменной над всеми свойствами формальным, поскольку возможно построение некоторой версии аксиоматической теории, достаточной для формулировки стандартной семантики логики второго порядка. В такой версии можно доказать категоричность теории и многие существенные результаты теории множеств. Но формальная метатеория, в которой получается категоричность, сама может считаться теорией первого порядка. Следовательно, в ней проходит теорема Левенгейма – Сколема о нестандартных моделях и категоричности больше нет. В пользу этого взгляда можно привести аргументы, традиционно приводимые при рассмотрении релятивизма в теории множеств, согласно которому одно и то же множество может иметь различную мощность в различных формальных системах.

В противовес этому сторонники логики второго порядка высказывают твердое убеждение, что метатеория, о которой идет речь, не может рассматриваться как неинтерпретированная теория с различными возможными моделями. Намеренная интерпретация этой метатеории – интуитивная семантика естественных языков, в которых формулируются содержательные истины математики. На первый план выступает область таких языков, а не понятие модели. Категоричность относится к естественному языку, а не к изоморфизму моделей в каждой интерпретации.

Релятивизм: Сколем vs Цермело

Ясно, что обсуждение проблем логики второго порядка в сопоставлении с аксиоматической теорией множеств сводится к тому, какая из этих теорий лучше “схватывает” интуитивные, или содержательные, истины математики. Релятивизм, свойственный аксиоматической теории множеств, возникает из-за того, что в ее основе лежит логика первого порядка, для которой справедлива теорема Левенгейма – Сколема. Важно иметь в виду, что релятивизм, каков он у Сколема, отнюдь не направлен специально против логики второго порядка. Потому что скептицизм относительно возможностей однозначного описания математической реальности применим к более широкому кругу проблем и вызывает к жизни гораздо больший круг проблем, чем проблемы логики второго порядка. Далее мы рассмотрим некоторые проблемы теории указания и теории значения, связанные с релятивизмом, а пока ограничимся сопоставлением логики первого порядка и логики второго порядка.

Релятивист может настаивать на том, что переменные логики первого порядка являются неинтерпретированными и могут существовать как стандартные, так и нестандартные интерпретации. В этом смысле возникает вопрос, что имеется в виду под натуральными числами, если допустимы нестандартные интерпретации. Естественный ответ состоял бы в том, что на самом деле переменные первого порядка должны интерпретироваться интуитивно, а для более точной трактовки натуральных чисел пригодна аксиоматика Пеано в языке второго порядка, самым важным положением которой является аксиома индукции

$$(P0 \;\&\; \forall\, x\,(Px \rightarrow Psx)) \rightarrow \forall\, x\, Px.$$

С точки зрения релятивиста это ничего не дает, поскольку указанную аксиому второго порядка можно рассматривать как аксиомную схему первого порядка и поэтому для такой аксиоматики можно дать разные модели с отличной друг от друга кардинальностью одних и тех же множеств. Выделение из этого набора моделей “минимальной”, которая отвечала бы намеренной интерпретации, проблематично. Единственный способ избежать такой проблематичности состоит в апеллировании к тому факту, что указание на натуральные числа ясно и недвусмысленно и что все структуры арифметики изоморфны. Но вряд ли понятия “все свойства” или “все подмножества” удовлетворяют критерию ясности.

Таким образом, логика второго порядка не избегает релятивистских обвинений в неясности ее концепций. Но ответ на такого рода обвинения представляет собой задачу более общего плана, поскольку речь идет о релятивизме в отношении уже объектного языка. В историческом аспекте любопытна полемика Сколема с Цермело в отношении возможностей аксиоматического представления теории множеств [29]. Аксиоматизация Цермело была формализацией второго порядка, в то время как Сколем пришел к выводу о том, что роль формализации может выполнить только логика первого порядка, но со всеми вытекающими из этой стратегии неприятностями типа релятивизма в понимании концепции множества.

Среди аксиом Цермело, по замечанию Френкеля и Бар-Хиллела, наиболее характерной является аксиома выделения (Aussonderungs). Именно посредством этой аксиомы совершается радикальный отход от точки зрения, согласно которой каждому условию $F(x)$ соответствует некоторое множество s, такое что $\forall x\,(x \in s \equiv F(x))$. Известно, что эта точка зрения ведет к парадоксам, и Цермело предложил применять операцию образования множеств предметов, обладающих некоторым свойством, к уже имеющимся множествам. Цермело делает два ослабления неограниченной аксиомы свертывания: множество не может задаваться независимо, а всегда должно быть выделено как подмножество уже заданного множества; кроме того, свойство, по которому множество выделяется, должно быть определенным. Понятие определенности является одним из наиболее дискутируемых понятий в философии математики и ее основаниях. В данном случае можно, следуя Сколему, полагать, что определенность означает формулу первого порядка. Более точно, эта аксиома у Цермело имеет следующий вид:

> Всякий раз, когда пропозициональная функция $P(x)$ определена для всех элементов множества M, M обладает подмножеством, содержащим те элементы, которые в точности являются элементами x из M, для которых $P(x)$ истинно.

При этом Цермело полагал пропозициональную функцию $P(x)$ определенной для области d при условии, что для каждого элемента x из d “фундаментальные отношения на области, посредством аксиом и универсально принятых законов логики определяют без произвола, справедливо или нет $P(x)$”. Сколем сформулировал отделение как схему, как пример для каждой формулы языка первого порядка. Именно это легло в основу канонического представления.

Поскольку Сколем критиковал понятие определенности, Цермело предпочел дать ему аксиоматическую трактовку, результатом которой явилось определение в языке второго порядка: если $P(g)$ определенна для каждой пропозициональной функции g, тогда определенны будут $\forall f\,(P(f))$ и $\exists f\,(P(f))$. Цермело полагает базисными сущностями пропозициональные функции, поскольку кванторы второго порядка пробегают над ними. Сколем же считает, что понятия универсального и экзистенциального квантора в применении к пропозициональной функции неясны, и предлагает рассматривать пропозициональные функции аксиоматически. В этом случае аксиоматика будет первого порядка, а пропозициональные функции будут играть роль индивидов.

Шапиро полагает, что спор Цермело и Сколема в конечном счете упирается в два разных понимания того, как в математику вводятся новые сущности [30]. Один способ – это постулирование сущностей, которые составляют некоторую реальность. Аксиоматика и формализация при описании этих сущностей призваны описать уже существующие объекты, и поэтому какие-то другие интерпретации аксиоматики и формализации считаются несущественными. Второй способ состоит в задании аксиом, и сущности, удовлетворяющие этим аксиомам, существуют. В этом случае вопрос заключается в том, какого рода аксиоматика и формализация используются. Если это аксиомы первого порядка, то тогда невозможно протестовать против нестандартных моделей и, естественно, невозможно выделить какую-то предпочтительную модель. Такое неявное задание сущностей приводит к неизоморфности моделей и некатегоричности теории. Если это аксиомы второго порядка, то тогда получается порочный круг, поскольку объекты "определяются" с помощью тех же самых объектов.

Таким образом, различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка упирается в различное понимание конструирования математических объектов. Одна из версий антиреализма связывает напрямую конструирование математического объекта со значением математического термина, который призван указывать на соответствующий объект. С другой стороны, математическая практика может быть отождествлена с употреблением математического термина. Согласно позднему Виттгенштейну, значение термина не может превзойти его употребления. Известная реконструкция скептического аргумента Виттгенштейна, осуществленная Крипке, сводится к тому, что предыдущее употребление выражения не может рационально ограничить его интерпретации до единственной. Схожий скептический аргумент излагается Патнэмом в его концепции внутреннего реализма [31]. Если Виттгенштейн (и его интерпретаторы) правы, тогда значение не содержит чего-то большего по сравнению с тем, что можно получить просто в результате рационального размышления по поводу употребления выражения. И никакое число данных по поводу употребления выражения, и никакая, включая аксиоматическую, характеристика этого употребления не могут рационально ограничить число интерпретаций выражения до единственной.

Скептические аргументы в отношении значения были направлены против платонистских тенденций в теории значения, потому что противоположностью идее Виттгенштейна было бы признание того, что значение превосходит употребление. Но в этом случае значение не будет доступно рациональному критерию, который значим при употреблении выражения, а это, в свою очередь, предполагает, что значение должно быть доступно каким-то прямым образом. Современная эпистемология не признает подобного рода прямого доступа к значению, поскольку при таком доступе оно остается чисто субъективным и личным.

И скептический вызов сколемовского толка, и платонистский аргумент представляются неудовлетворительными. Однако нелегко найти контраргументы в случае скептического вызова. Во-первых, у разных критиков классической теории значения существенно различается аргументация, и трудно найти общие контраргументы. Во-вторых, не ясно, в какой степени скептические аргументы, являющиеся обобщением математических результатов, являются значимыми для более общего случая языка.

Однако аргументация, связанная теорией значения и теорией указания, выводит нас за пределы сравнения логики первого порядка и логики второго порядка. В самом деле, представляет интерес, в какой степени предпочтение той или иной логики мотивируется чисто математическими интересами и в какой степени это предпочтение может иметь философские мотивы.

Прежде всего следует отметить, что абстрактная постановка проблемы о том, какая логика лучше, бессмысленна с точки зрения проблемно-ориентированного подхода к основаниям математики. Надо задать вопрос о цели применения той или иной логики. Больше того, видимо, не существует единственной правильной практики такого применения. Мы имеем в зависимости от поставленной задачи неопределенное число неэквивалентных моделей неформальной математической практики.

Можно предположить, что в основе предпочтения логики первого порядка лежит цель изучения понятия дедуктивной системы. Понятие доказательства является в этом случае важнейшим, тем более что теоретико-модельное отношение следования “не схватывает” понятия “доказательство” или даже “доказуемый”. Здесь надо четко выявить те цели и задачи, которые ставятся при исследовании математической практики. Понятие классического следования, подразумеваемое очевидным многими философами, сталкивается с трудностями.

Компактность и нестандартные модели

Важнейшей характеристикой классического следования является компактность. Отношение следования компактно, если любое следствие бесконечного множества посылок есть следствие его конечного подмножества. Это свойство выглядит довольно естественным, поскольку при анализе понятия следования мы исходим из понятия вывода истинного заключения из истинных посылок. Обобщения этой идеи просты: следует допустить истинное заключение из нулевого числа посылок и бесконечное число посылок. Имея в виду математическую практику, можно обобщить идею аргумента еще раз – предположить бесконечное число посылок, поскольку любая посылка может быть удвоена за счет двойного отрицания, повторения этой операции и т.д.

Наличие у классического следования свойства компактности делает следование более управляемым. При компактности вывод значим, если и только если заключение следует из конечного числа посылок. С другой стороны, компактность представляет собой сильное ограничение на выразительные возможности формализмов. Понятие следования можно рассматривать с синтаксической точки зрения, в рамках которой следование трактуется как свойство дедуктивной системы. Желательное свойство дедуктивной системы состоит в том, чтобы доказуемые формулы были истинными. Компактность соответствует этому желательному свойству. Дедуктивная система в данном случае полна. Однако есть вывод такого рода, в котором следование может рассматриваться с семантической точки зрения. Действительно, пусть у нас имеется утверждение "для каждого n, $A(n)$ есть логическое следствие бесконечного множества посылок $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$,…, где n – натуральное число". Интуитивно такой вывод оправдан, но он не обладает свойством компактности и, стало быть, не является частью классической концепции следования.

Объяснение нарушения классического следования состоит в том, что логика с компактностью была предназначена для аксиоматизации математики, т.е. для поиска конечного числа аксиом, из которых может быть выведена вся содержательная математика. Теорема Геделя о неполноте арифметики показала невозможность такой аксиоматизации. То есть стандартная модель арифметики, состоящая из чисел 1, 2, 3,…, не может быть представлена таким множеством формул, которые характеризовали бы эту модель точно. Это значит, что такое множество формул имеет различные неизоморфные модели. Следовательно, категоричность исключает компактность, но именно компактность требуется теорией доказательства. Кодификацией такого рода доказательства является логика первого порядка, а логика второго порядка не имеет свойства компактности.

Главное преимущество языка второго порядка перед языком первого порядка состоит в том, что арифметика второго порядка позволяет устранить нестандартные модели за счет выражения во второпорядковом языке того факта, что стандартная модель является исходным сегментом всех остальных моделей, и того, что именно в этом сегменте мы и заинтересованы. Факт этот выражается аксиомой индукции, которая является второпорядковой. Аксиома утверждает, что любое свойство, которым обладает 0, если оно принадлежит числу n, принадлежит и числу $n + 1$. Если использовать для выражения этой аксиомы язык первого порядка, то появляется неясность в отношении выражения “любое свойство”. В первопорядковой версии аксиомы используются схематические буквы, пробегающие над подмножествами, что не исключает появления нестандартных моделей. А семантика языка второго порядка гарантирует, что “любое свойство” означает на самом деле любое свойство.

Другими словами, логика второго порядка более предпочтительна по той причине, что понятие следования в ней отвечает интуитивным представлениям о значимом заключении аргумента. Полнота логики первого порядка гарантирует, что правила вывода в ней обеспечивают доказательство следствий первого порядка, но при этом ряд интуитивных следствий в ней не проходят. Таким образом, мы имеем два метода исследования содержательных математических утверждений: теорию доказательства и теорию моделей. Если в исследовании превалирует теория доказательств, тогда центральной концепцией является понятие дедуктивной системы. “Логик будет настаивать на точном соответствии теоретико-модельного отношения следования и дедуктивного отношения следования”, – замечает С.Шапиро. В трактовке как исчисления высказываний, так и исчисления предикатов сначала дается теоретико-модальное изложение, а затем – теория доказательств. Между тем при использовании формальных языков мы стремимся к прояснению вопросов онтологии и эпистемологии в математическом познании. В этом случае понятие дедуктивной системы не является центральным. Дело в том, что более важным понятием является понятие теоретико-модельной интерпретации, т.е. семантика, поскольку соотношение формального языка и интерпретации представляет соотношение языка и мира. В конечном счете, несмотря на свою специфику, математический дискурс есть все-таки дискурс о мире.

Логика первого порядка считается предпочтительной для математического дискурса по той причине, что в математике главным является доказательство. Теоретико-модельное отношение следования “не схватывает” понятия доказательства, – действительно, семантическое понятие следования может быть шире дедуктивного понятия, будучи реализацией интуитивных представлений. Может создаться парадоксальное положение, когда семантическое следствие уже принятых результатов окажется синтаксически недоказуемым. Такая ситуация погрузит математический дискурс в хаос и парадоксы. По этой причине сторонники логики первого порядка, т.е. логики с полнотой, ограничивают математический дискурс доказательными утверждениями.

Математический дискурс, или математическая практика, заключается в описании “математической реальности”, намеренной интерпретации символов. Распространенным методом такого описания является аксиоматизация. Пусть система аксиом имеет ряд моделей. Если намеренная интерпретация совпадает с моделью аксиом и если каждая модель совпадает с намеренной интерпретацией, тогда аксиоматизация считается успешной. Вопрос заключается в том, сводится ли математический дискурс к дедукции следствий из аксиом. Если дедуктивная система полна, тогда действительно все содержательные истины будут доказуемы. Это и будет аргументом в пользу логики первого порядка. Однако Булос [32] обратил внимание на парадоксальную ситуацию с понятием логического следования в логике первого порядка. Пусть имеется аргумент I в языке первого порядка, который имеет более или менее короткий вывод I из посылок в языке второго порядка. Булос приводит такой пример. Можно дать и теоретико-модельное доказательство, что I значимо в теоретико-модельной семантике. Так как I – первого порядка и логика первого порядка полна, существует выведение заключения I из посылок в стандартной дедуктивной системе первого порядка. Булос, однако, показывает, что самое короткое выведение I имеет огромное число шагов. Ясно, что если аргумент первого порядка значим, тогда в этом можно убедиться через вывод в стандартной дедуктивной системе первого порядка. Однако только что приведенный пример говорит о том, что такой “в принципе” вывод неконструктивен. Более подходящим кандидатом на математический дискурс является открытие следствий из аксиом в рамках логики второго порядка, тем более что в рамках логики первого порядка многие теоремы содержательной математики не представляют собой следствий из аксиом.

На самом деле ни та, ни другая активность не является подлинно “репрезентативной” для математики. Наиболее употребительный прием – вложение исследуемой структуры в более богатую структуру, которая проливает свет на первую. Такой более богатой структурой может служить та же теория множеств. Так что с точки зрения претензий на большую основательность в математической практике не выигрывает ни логика первого порядка, ни логика второго порядка. Все определяется целями математического дискурса.

Примечания

1. См. оглавление работы С.Шапиро “Основания без обоснования” (*Shapiro S*. Foundations without foundationalism: A case for second-order logic. – Oxford Univ. Press, 1991).

2. Среди работ, в которых развивается подход к основаниям математики в духе Фреге, можно указать следующие: *Wright C*. Frege’s Conception of numbers as objects. – Aberdeen Univ. Press, 1983; *Hale B*. Abstract objects. – B.Blackwell, 1987. Как это ни парадоксально, к данному направлению можно причислить и самого видного номиналиста наших дней Х.Филда, который полагает, что вся математика есть консервативное расширение над логикой (см.: *Field H*. Is mathematical knowledge just logical knowledge? // Philos. Rev. – 1984. – V. XCIII, No 4.

3. *Jane I*. A critical appraisal of second-order logic // History and Philosophy of Logic. – 1993. – V. 14. – P.67–86.

4. Наиболее интересной разработкой проблемы относительно содержательности логических истин в последние три десятилетия является применение к философским проблемам математики аппарата дистрибутивных нормальных форм логики первого порядка Я.Хинтикки. См.: *Hintikka J*. Logic, language games and information. – Oxford: Clarendon Press, 1973.

5. К сожалению, здесь ситуация не так проста, поскольку статус таких аксиом, как аксиома бесконечности или аксиома выбора, совершенно не ясен. Многие исследователи настаивают на том, что несмотря на свое присутствие в качестве аксиом теории множеств, эти аксиомы по сути являются логическими.

6. *Hintikka J*. The principles of mathematics revisited. – Cambridge Univ. Press, 1998. – P.4.

7. В русском переводе эта книга была издана в1948 г.

8. См., например: *Quine W*. Methods of logic. – *Id*. Word and Object. – MIT Press, 1960.

9. *Hintikka J*. The principles... – P.6, 7.

10. См.: *Heijenoort J., van*. Set-theoretical semantics // In Logic Colloqium 76. – Amsterdam, 1977. – P.183–190.

11. См.: *Sluga H*. Frege against Booleans // Notre-dame Journal of Formal Logic. – 1987. – V. 28. – P.80–98.

12. См.: *Hintikka J*. On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory // Lingua Universalis versus Calculus Ratiocinator. – Kluwer Acad. Press, 1997. – P.104–139.

13. См.: *Shapiro S*. Foundations without foundationalism. – P.175.

14. *Hintikka J*. The principles of mathematics revisited.

15. *Resnik M*. Frege and the philosophy of mathematics. – Cornell Univ. Press, 1980. – P.120, 121.

16. См.: *Hintikka J*. On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory. – P.116.

17. Поскольку логика второго порядка сейчас не в моде, аргументацию в ее защиту следует искать у структуралистов, которые свою программу оснований математики прямо ставят в зависимость от важности для математической практики логики второго порядка. Своим пониманием вопроса я весьма обязан двум цитируемым ниже прекрасным работам структуралиста С.Шапиро. Больше того, как мне кажется, цели

и задачи проблемно-ориентированного подхода к основаниям математики в значительной степени совпадают с аналогичными целями и задачами структурализма, по крайней мере в отношении понятия логического следования. При этом я не разделяю философскую позицию структурализма и принимаю ее лишь в версии П.Бенацеррафа.

18. См.: *Corcoran J*. Gaps between logical theory and mathematical practice // The methodological unity of science / Ed. M.Bunge. – Dordrecht: D. Reidel. – P. 23–50.

19. См.: *Quine W.V.O*. Philosophy of logic. – Prentice-Hall, 1970.

20. См.: *Quine W.V.O*. Set theory and its logic. – Cambridge Univ. Press, 1963.

21. См.: *Hintikka J*. The principles of mathematics revisited.

22. См.: *Shapiro S*. Foundations without foundationalism.

23. См.: *Quine W.V.O*. Philosophy of logic. – P.66.

24. См.: *Azzouni J*. Metaphysical myths, mathematical practice. – Cambridge Univ. Press, 1994. – P.16.

25. Ibid. – P.17–18.

26. См.: *Higginbotham J*. On high-order logic and natural language // Philosophical Logic / Ed. T.Smiley. – Oxford Univ. Press, 1998. – P.8.

27. См.: *Bostock D*. On motivating higher-order logic // Philosophical Logic. – P.31.

28. Ibid. – P.36, 37.

29. См.: *Skolem T*. Some remarks on axiomatized set theory, 1922 // Heijenoort J., van. From Frege to Godel. – Harvard Univ. Press, 1967. – P.290–301.

30. См.: *Shapiro S*. Second-order logic, foundations, and rules // Journ. of Philosophy. – 1990. – P.234–261.

31. См.: *Kripke S*. Wittgenstein on rules and private language. – Blackwell, N.Y., 1982; *Putnam H.* Models and reality // Journ. of Symbolic Logic. – 1980. – V. 45, No 3. – P.464–482.

32. См.: *Boolos G*. The consistency of Frege's foundations of arithmetic // On being and saying / Ed. J.Thompson. – Cambridge Univ. Press, 1987. – P.3–20.

Институт философии и права СО РАН,
г. Новосибирск

Tselishchev, V.V. **The language of mathematics and the aims of mathematical discourse**

The paper discusses two concepts of logic and logical consequence. The second-order logic is compared with the first-order logic in the respect of compactness and non-standard models. The relativism as philosophical consequence of use of the first-order logic is considered as a restriction in mathematical discourse.