МНОЖЕСТВО И ЧИСЛО

С.К. Черепанов

Известно, что математику (М) можно построить на языке теории множеств (ТМ), теории имен (ТИ) и в терминах функции и ее применения к аргументу [1]. Бесспорно, сведение содержательного разнообразия М к некоторому примитивному словарю позволяет выявить унифицированную структуру математических теорий, вскрыть единство математических методов [2].

Однако такие сводимости не решают проблему оснований М. Речь, понятно, не идет о том, что использование базисных абстракций (множества, функции, обозначения и соответствующих теорий) не позволяет представить М как дедуктивную систему, – это как раз удается! Но дедуктивные основания М не совпадают с ее генетическими и интуитивными основаниями – с понятием числа и образом натурального ряда чисел *N*. Именно интуиция числа составляет содержательную основу М. И эта интуиция не может быть, согласно теореме Геделя, репрезентирована дедуктивной формальной системой, если последняя непротиворечива. Разумеется, невозможность обойтись без интуиции числа (или образа всюду определенного последователя) при построении дедуктивных моделей М не перечеркивает и не делает менее интересным сам поиск подобных моделей. Однако следует сознавать, что обосновательная проблема при этом не решается. Идея числа и образ *N* по-прежнему остаются базисными и неопределяемыми интуициями, как бы кому-то ни хотелось доказать обратное.

Невозможность дать прямое определение числа также не препятствует обсуждению вопроса о том, как мог бы выглядеть путь или маршрут, следуя по которому искомое определение могло бы состояться.

Ставя целью выстроить возможный путь к определению числа, мы упираемся в проблему выбора исходных понятий. Главное здесь – избежать предвосхищения оснований, petitio principii (P.P), и одновременно выбрать достаточно содержательные начала, позволяющие осуществить теоретическую реконструкцию идеи числа. Принято считать, что понятие множества должно быть одним из таких исходных понятий. Однако математическая ТМ строится с использованием готовой числовой определенности.

Она, впрочем, изначально была ориентирована на то, чтобы говорить о количественных определенностях, хотя и в более абстрактном нежели предшествующая М, стиле. Поэтому отталкиваться от такого предшествующего опыта считалось оправданным. Однако то, чем еще помимо нового стиля говорения о количестве могла бы стать ТМ, оставалось неясным. К тому же обнаружилось, что практика «самоговорения» логически уязвима: Кантор сам открыл дверь парадоксам ТМ, и первый парадокс назван его именем.

Трудности и проблемы новой теории скоро были преодолены: ТМ получила аксиоматическое представление (АТМ). Однако «числовая телеологичность», или предзаданность количественной определенности, воплощенная в принципах развертывания ТМ, не позволяла последней претендовать на статус логического фундамента М.

В равной степени использование готовой количественной определенности предполагается в кванторной логике и системе Лесневского, онтологическую составляющую которой и имел в виду Н. Непейвода, употребляя термин «теория имен».

Подытоживая сказанное, можно констатировать: арсенал идей и методов, наработанных в ТМ, ТИ (т.е. логической семантике), способен лишь уточнить идею числа, но не объяснить непосвященному, что такое число [3].

Мы полагаем, что избежать вышеупомянутой предзаданности достаточно просто: надо отказаться при введении идеи множества от того, чтобы ориентироваться на выражение количественной определенности. Взамен этого необходимо ориентировать идею множества на репрезентацию того фундаментального понятия, которое лежит в основании ТИ, – отношения обозначения, или name-relation (n-r).

Утверждать, что последнее несет в себе идею (интенцию) числа, пожалуй, глупо, хотя под вывеской «теория имен» может скрываться весь спектр семантических исследований от Рассела и Карнапа до Гайфмана и Крипке включительно. Бесспорно, однако, что понятие имени (отношение обозначения – n-r) считается базисным и неопределяемым не только в рамках логики (логической семантики), но и в семиотике (с той только разницей, что в семиотике говорят о знаках и знаковой ситуации, а не об именах, что в нашем случае ровно ничего не меняет).

Итак, мы предлагаем рассматривать понятие множества как способ репрезентации n-r. Для самой ТМ подобная погружаемость важна и необходима, чтобы она могла избежать телеологичности, сделавшись независимой от идеи числа и получив тем самым возможность претендовать на роль полноценных оснований М, позволяющих осуществить теоретическую реконструкцию идеи числа без предвосхищения оснований (Р.Р). Что же касается семантики или семиотики, которые мы, следуя введенной традиции, будем по-прежнему называть ТИ, то они, обретя возможность использования ТМ-инструментария, лишенного количественной окраски, смогут сделаться самостоятельной теоретической дисциплиной, имеющей собственный языковой жаргон (спецификацию ТМ-языка).

Тот факт, что существующая ТМ не может избежать Р.Р при определении числа, был отмечен еще на заре создания ТМ французским математиком А. Пуанкаре [4]. Позволим себе привести ряд высказываний великого ученого.

«Определения числа весьма многочисленны и весьма различны, – пишет Пуанкаре. – Я отказываюсь перечислить даже имена их авторов. Будь одно из них удовлетворительно, новых определений уже не давали бы… Читая работы, посвященные этой проблеме, я всегда испытывал крайне тягостное ощущение. Я постоянно был начеку, ожидая, не наткнусь ли я на petitio principii, и, когда я его сразу не замечал, то я боялся, что проглядел… Дело в том, что невозможно дать определение, не употребив грамматического предложения, и трудно произнести предложение, не вставив в него название числа, или, по крайней мере, слово “несколько”, или не употребив слова во множественном числе. А тогда становишься на скользкий путь и сиюминутно рискуешь впасть в petitio principii» [5].

Анализируя далее примеры ТМ-определений чисел, приводимые в статьях Л. Кутюра, Пуанкаре не без сарказма замечает: «Что такое нуль? Это число элементов класса ничто; а что такое класс ничто? Это такой класс, который не содержит никакого элемента. Никакого – значит ни одного. Таким образом, нуль определен с использованием единицы. В свою очередь единица определяется как число элементов такого класса, два любых элемента которого тождественны. Но я боюсь, – продолжает Пуанкаре, – что если спросить у г. Кутюра, что такое два, ему придется воспользоваться словом “один”» [6].

Кутюра в ответной полемической статье заявляет: «Он пользуется против меня лишь тем, что я употребил слово “два”, желая составить *разговорную фразу*» [7]. По мысли Кутюра, можно было бы вообще не использовать слово «два», а говорить о совпадении или тождестве классов, состоящих из одинаковых элементов. Эти совпадающие элементы суть на самом деле только разные названия одного и того же индивида. Никакого Р.Р, по мнению Кутюра, здесь нет. «Индивидуальность объекта есть свойство, присущее каждому элементу класса, тогда как число один есть свойство всего класса… Следовательно, во всех случаях единицы, составляющие какое-нибудь количественное число, отличны от числа один» [8]. Прав ли Кутюра?

Чтобы разобраться в этом, выпишем те неявные предпосылки, на которых базируется оппонент Пуанкаре.

1. Имея дело с языковыми образами объектов, надо быть готовым к тому, что сам словесный способ упоминания объекта может деформировать его предметное, мыслимое содержание. Поэтому надо быть готовым отличать языковое поведение – *разговорную фразу* - от мысли как таковой. Как тут не вспомнить тютчевский афоризм: мысль изреченная есть ложь! Именно по этой причине всякий раз, когда мы пытаемся выразить идею тождества, приходится упоминать о различии.

2. Требуя способности отличать число один как свойство класса от свойства единичности как характеристики элемента класса, логицисты, с которыми в лице Кутюра полемизирует Пуанкаре, хотят видеть в этом фундаментальный принцип ума. На это стоило бы заметить, что универсальность раличия индивида и одноэлементного множества (единичного класса) весьма сомнительна. Такое различие всецело конвенционально, его приемлемость всякий раз оправдывается прагматически, т.е. характером поставленной задачи. Конечно, один человек и число один – разные объекты (человек не равен числу). Но из этого не следует, что мысль, стоящая за единицей справа, отлична от той, что стоит за единицей слева.

Вообще же принцип определения через абстракцию (ПА) как один из главных методологических приемов М не годится для определения числа. «Определения через абстракцию стали привычными, правомерность их использования как будто не вызывает сомнений. Но когда речь идет об основаниях классической математики, когда анализируется категориальный каркас, определяющий природу математики, приходится все же задумываться над вопросом о законности этого приема. Прежде всего приходится признать, что пользуясь ПА и отождествляя инвариант класса с самим классом, мы совершаем противоестественный акт, никак не согласующийся с интуицией. Ведь “человек вообще” (как инвариант класса людей. – *С.Ч.*) не есть класс всех людей; точно так же “число” не есть класс равночисленных множеств, а форма фигуры не есть класс подобных фигур» [9]. Вот и приходится дорисовывать недостающую содержательность ПА при определении числа контрабандным способом – за счет интуиции, камуфлируя все это ссылками то на «естественный свет разума» (т.е. естественный порядок мощностей канторовских множеств), то на очевидность различия между множеством, которого нет, и аналогичным подмножеством [10], то на неистребимую склонность языка деформировать мысль. Но даже если считать язык этаким бесплатным генератором недостающей определенности, то кто же заставляет «честных логицистов» пользоваться услугами столь сомнительного свойства? Если видите, что нельзя сказать о едином, не говоря о многом, так и не говорите – какие проблемы!

Полемику Пуанкаре с логицистами можно при желании трактовать как отголосок спора вокруг проблемы предсуществования логических категорий, начавшегося еще на заре философии. Речь идет о том, что для получения знания об общем свойстве, присущем некоторому классу объектов, мы должны уметь *предварительно выделить это множество*, т.е. знать его специфические характеристики. Знание общего в этом случае оказывается предшествующим оперированию с объектами и потому не может рассматриваться как абстрагированное от них [11]. Соответственно, чтобы абстрагировать свойство эквивалентности, без которого не обходится ПА, нужно заранее уметь распознавать эквивалентные и неэквивалентные совокупности. Для этого необходима система эталонов, принимаемых конвенционально.

Подведем некоторые итоги рассмотренной дискуссии. Критические высказывания Пуанкаре в адрес логицистов, безусловно, справедливы. Но у них есть маленький недостаток: они неконструктивны. Утверждая несостоятельность логицистских версий определения числа, Пуанкаре не предлагает ничего взамен.

С нашей точки зрения в «оправдательной позиции» Кутюра есть рациональное зерно, которому следует помочь прорасти. Мы имеем в виду признание того, что упоминание различного (или множественности) в контексте определения единого есть *разговорная фраза*, или фигура речи. В чем же здесь конструктивный потенциал? Не желая перегружать текст статьи подробностями анализа, констатируем главные итоговые моменты.

1. Понятие множества в рамках ТМ не несет в себе чего-либо отличного от понятия множественного числа, являясь скорее лексическим инвариантом различных случаев употребления последнего. И хотя использование

новых форм говорения стимулирует рождение новых мыслей, все же созданная Кантором и усовершенствованная его последователями теория является не чем иным, как продолжением разговора о числах как предмете математического исследования. Развертывание ТМ позволяет присоединить к уже известным видам чисел новые разновидности – так нзываемые трансфинитные порядковые числа, и не больше! Никаких *произвольных* множеств в ТМ нет [12]. Поэтому канторовские множества могут рассматриваться как необходимые, но не достаточные средства для логической реконструкции числа.

2. Единственная попытка выйти за рамки определенных мощностей и начать рассуждать о множестве вообще как самостоятельном предмете мысли, которую можно предпринять, – это завести разговор о множестве всех множеств. Однако в канторовском варианте ТМ такая попытка заканчивается парадоксом.

3. Мы полагаем, что ответственность за это лежит на самой ТМ, что дело в ее однобокой ориентации на количественность. Сама по себе фраза о «множестве всех…» предоставляет возможность рассматривать множество не как обобщенный образ количествееной определенности (множественного числа), а как способ говорения об объектах, минуя стадию их количественной оценки. Иными словами, «множество всех…» – чисто разговорная фраза в контексте ТМ, употребление которой делает бессмысленным вопрос «сколько?», а значит, и поиск ответа на него. Понятие всех как синоним понятия целого (здесь мы солидаризируемся с традицией Львовско-Варшавской школы [13]) противостоит понятию части, а тем самым и идее числа как уточняющей характеристики этой частичности [14]. Конструкцию «множество всех…» как фигуру речи, разговорный прием следует отличать от настоящего множества, которое всегда имеет (точнее, может иметь) определенную мощность. «Множество всех…» – это материя числа, число – форма, которую может обрести материя, если их не смешивать друг с другом. Смешение этих понятий мы наблюдаем в парадоксе Кантора, когда спрашиваем: а что больше – K или 2^K? Действительно, в этом случае нам приходится принимать способ говорения («множество вообще» – это фигура речи) за самостоятельный объект, мыслимый в одном ряду с «настоящими» множествами (мощностями). Можно еще добавить, что в тех случаях, когда акт упоминания о некоторых (конкретных) математических сущностях начинают рассматривать как *средство конституирования подобных*

сущностей, возникают иные виды парадоксов. Например, различные варианты антиномий Ришара – Берри или Греллинга – Нельсона.

4. Подытоживая сказанное в пунктах 1–3, можем констатировать: а) множество вообще, вне количественной оценки есть просто фигура речи; б) если некоторое множество в принципе лишено количественных характеристик, его можно использовать (при некоторых дополнительных условиях) как средство представления речевого акта (фигуры речи).

Аналогия между числом и мыслью весьма прозрачна. Множество – это материя числа, или способ говорения о числах, точно так же как язык – материя мысли. Вспоминая тезис о неопределенности перевода, можем утешиться или вдохновиться тем, что грань между языком и мыслью безусловно существует, хотя ее «семантические координаты» всегда условны и относительны.

Общий вывод, которым может быть резюмирован пафос статьи, таков. *Средств математической ТМ недостаточно для определения (генетической реконструкции) понятия числа. Чтобы восполнить этот недостаток, надо добавить те конструктивные идеи, которые присутствуют в ТИ (и еще в понятии логического оператора как третьей составляющей дедуктивных основ М). Но предварительно их надо перевести на ТМ-язык.* Обсуждению возможностей такого перевода посвящена заключительная часть статьи.

Чтобы придать ТМ-построениям «семиотическую нагруженность», установим предварительное логическое сходство между понятиями знака и множества. Это сходство проявляется в том, что как множество, так и знак являются разновидностями ситуации противоречивого единства мысли и языка.

В понятии множества, или многого, мыслимого как единое, можно видеть специфическую ситуацию «переодевания» мысли языком: нечто выглядит как отличное от себя (многое – антипод единого). Этим же свойством – способностью служить средством указания на нечто отличное от себя – характеризуется сущность знака (имени). Обычно знаковую ситуацию характеризуют двояко: с одной стороны, знак должен быть некоторым образом сходен с обозначаемым (*A*), – только в этом случае он может неэпизодически выполнять свою указательную функцию; с другой стороны, знак произволен, и его природа никак не кореллирует с природой обозначаемого (*B*) [15].

Принципиально важно заметить, что перечисленные свойства знака не вызывают вопросов и считаются понимаемыми лишь при условии, что мы владеем смыслом понятия «обозначенность» (n-r). Вне этого допущения ясность и понятность знака иллюзорны. Соответственно, основания семиотики (знаковая ситуация) являются столь же шаткими, как и основания М.

Итак, мы имеем два фундаментальных, т.е. разъясняемых лишь на примерах, но схожих понятия – «множество» и «знак» (n-r). Покажем теперь, что развертывая и уточняя понятие множества посредством концептуализации и построения ТМ, мы аналогичным образом проясняем и конкретизируем содержание понятия n-r.

Прежде всего отметим главное, что делает возможным использование понятия множества в качестве модели n-r. Оно заключается в том, что генезис идеи множества неразрывно связан с формированием представления о субъективном образе окружающей среды (объекта).

Если считать. что наиболее общей характеристикой объекта как внешней к субъекту, его уникальному «Я» данностью является множественность (непустота предметного универсума У), то понятие множества вполне подходит для представления *идеи* объекта (не случайно смысл множества принято раскрывать, приводя примеры предметно-материальных конгломератов). Таким образом, множественность – характеристика всего того, что отлично от «Я» познающего субъекта. А это значит, что через задание множественности реализуется отношение данности внешнего мира – его обозначенность как чего-то отличного от «Я». Совершенно естественно поэтому видеть в формировании понятия множества (в восхождении от конкретного к абстрактному) становление *идеи* обозначенности, т.е. представленности, отличной от «Я» реальности, идеи, не требующей предварительного знания ни об объекте и его разновидностях, ни о знаке (имени) и его разновидностях. Но это и есть n-r в чистом виде, т.е. отношение обозначенности как таковое, фиксируемое безотносительно его синтаксических (грамматических) и онтологических составляющих (они образуют самостоятельное поле проблем, в решении которых логическая семантика значительно преуспела [16]). Иными словами, существование этого отношения не требует предварительного знания ни о знаке (имени), ни об объектах самих по себе.

Итак, множество по своему генезису вполне пригодно для репрезентации свойства схожести знака и обозначаемого, о котором гласит пункт (А) описания знаковой ситуации. С другой стороны, множество как идеальная конструкция не зависит от существования или несуществования конкретных материальных объектов: элементы множества в силу того, что их природа выносится за скобки, могут существовать одновременно в составе различных множеств, не утрачивая своего «элементного статуса». Они не подвержены никаким эмпирическим ограничениям на существование. Отсюда проистекает неограниченность объема понятия множества, которое может включать самые фантастические конструкции, – все есть какое-нибудь множество! В этой свободе конструирования реализуется свойство *В* знаковой ситуации – произвольность знаков.

В итоге аргументировано принципиальное положение. *Подобно тому как основное свойство – способность указывать на нечто отличное от себя (способность обозначать) не связано с природой (материей) самого знака, способность множества репрезентировать факт непустоты У форм сущего не связана с природой и количеством (!) элементов самого множества. Более того, способность к репрезентации многого только и возможна при условии независимости множества от собственных элементов.*

Казалось бы, аргументировав возможность ассоциировать с понятием множества содержание отношения *n-r*, мы можем начать работу по систематизации и типологизации знаковых ситуаций, соотнося их с конкретными типами множеств, получаемых в ТМ. Однако данный путь тупиковый.

Дело в том, что традиционное развертывание ТМ демонстрирует нам лишь частный случай независимости множества от своих элементов. Это независимость от качественной составляющей природы элементов множества, но не от их количества. Иными словами, *идея* множества (а только она является моделью *n-r*) при традиционном построении ТМ, т.е. при развертывании, подчиняющемся теореме Кантора – Бернштейна об универсальной сравнимости мощностей, не отображается в мощностную шкалу алефов: идея не может смешиваться с собственными реализациями.

Наиболее подходящим средством для ТМ-представления идеи множества как модели n-r могло бы стать канторовское множество всех множеств *К*. И дело не в том, что оно противоречиво – в этом-то как раз нет проблемы, коль скоро понятие мощности вводимо не сразу, существуют и паранепротиворечивые логики. Дело заключается в отсутствии в структуре *К* указания или намека на *преодоление количественного начала множественности*. Соответственно, вопрос о мощностной характеристике

K будет «висеть в воздухе». А это значит, что АТМ+*K* нельзя рассматривать как подходящее начало для определения числа.

Подходящей ТМ-конкретизацией идеи множества как модели n-r может служить пара $\{H,\varnothing\}$, где H – символ Ришарова числа, трактуемого как сообщение об отсутствии какой-либо определенной мощности, могущей быть охарактеризованной средствами АТМ, или неопределенно-конечная мощность, а $\varnothing$ – ТМ-образ предметно-материального многообразия, т.е. материальный прообраз множества.

Реализуя в дальнейшем идею устойчивого отличия H от $\varnothing$, т.е. проводя строгую грань между неопределенностью и противоречием, нормируя возникающую при этом определенность ($R(H,\varnothing)$) на выражение минимального различия, с которым ассоциируется языковой образ лжи (а именно, отличие Л( ) от Л, завуалированное в парадоксальной фразе Лжеца, которое само по себе есть чисто порядковое различие), мы сможем строить реккурентную последовательность образов этого отличия, отождествляя ее с логической реконструкцией N.

Примечания

1. См.: *Непейвода Н.Н.* Практическая логика. – Ижевск, 1999. – С. 35.

2. Следует осознавать условность подобного видения: М в целом – это не только не прочитанная, но и не написанная книга. Речь, следовательно, может идти лишь о части М.

3. См.: *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики// Закономерности развития современной математики. – М., 1987.

4. См.: *Новые* идеи в математике: Сб.10. – Петроград, 1915.

5. Там же. – С. 10.

6. Там же. – С. 13.

7. Там же. – С. 76.

8. Там же – С. 78.

9. *Мадер В.В.* Введение в методологию математики. – М., 1995. – С. 204.

10. См.: *Черепанов С.К.* Основной вопрос философии математики // Философия математики: актуальные проблемы. – М., 2007.

11. См.: *Горский Д.П.* Обобщение и познание. – М., 1985. – С. 28.

12. Доказательство Коэном теоремы о независимости *C*-гипотезы о аксиом АТМ позволяет предположить, что в контексте АТМ можно допустить появление различных промежуточных мощностей. Но реализация данной перспективы, по-видимому, требует выхода за рамки канторовской теории. Одним из путей в этом направлении может служить теория полумножеств (*Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. – М., 1983).

13. См.: *Воленьский Я.* Философия Львовско-Варшавской школы. – М., 2003. – С. 174–187.

14. Надо иметь в виду, что отношение часть – целое универсально лишь на области макроскопических структур объективного мира. В иных случаях ее смысл не ясен.
15. См.: *Шрейдер Ю.А.* Логика знаковых систем. – М., 1974. – С. 6.
16. См.: *Тондл Л.* Проблемы семантики. – М., 1974. – С. 60–61.

Институт философии и права СО РАН,
г. Новосибирск

Tcherepanov, S.K. **Set and number**

The paper discusses possible ways to define the notion of number. Arguments presented that instruments of traditional set theory are insufficient for producing proper and valid definition of number. To fill this gap, one may use the basic concept of name-relation theory, primarily placing it into TM language.