Из истории науки

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА: ПАРАДОКСЫ ДВОИЧНОГО ПРИНЦИПА СЧИСЛЕНИЯ

И.И. Литовка

Все знания о египетской математике основаны на очень малом количестве текстов, сохранившихся от Среднего царства, возможно от периода Гиксосов (XVII в. до н.э.):

1) математическом папирусе Ринда, хранящемся в Британском музее. Он был переписан с более древнего источника, судя по пометкам писца;
2) Московском математическом папирусе из Музея изобразительных искусств, исследованном академиком В. Струве и содержащем наиболее спорные моменты;
3) Берлинском папирусе № 6619;
4) кахунском папирусе времен Среднего царства;
5) кожаном свитке № 10250 из Британского музея;
6) деревянных табличек № 25367 и 25368 из Каира.

Перечисленные документы – единственные сохранившиеся источники, по которым можно судить о египетской математике. Из них всего два признаются наиболее ценными и активно изучаются, – это Московский математический папирус и папирус Ринда. В папирусе Ринда собрано 80 задач, в папирусе из московского Музея изобразительных искусств – 25 [1]. Папирус Ринда по своим размерам намного превосходит все другие тексты: в длину он имеет 5,5 м, а его ширина составляет 32 см. Московский математический папирус примерно в четыре раза меньше и в нем не сохранилось начало текста. Эти документы написаны иератическими знаками и датируются периодом Среднего царства. Однако достоверно неизвестно, когда они были составлены, так как подобного рода документы многократно копировались и обычно переписчик указывал дату не оригинала, а последних копий.

Египетские знаки для обозначения чисел и математических операций не отличались большой сложностью. Сложение обозначалось косой чертой (/), а вычитание – знаком, похожим на современный знак умножения (×). Чтобы получить число от 11 до 19, необходимо было прибавить соответствующее количество черточек к символу, обозначающему 10. Число 20 обозначалось двумя знаками для 10, 30 – тремя и т.д. Кроме 10 и 1 числами, которые имели особые знаки, были 100, 1 000, 10 000 и 1 000 000:

| – единица; – десять; – сто; – тысяча;

– сто тысяч; – десять тысяч; – миллион.

Число 12 125 египтянин написал бы следующим образом:

,

а результат операции сложения 60 и 8 записывался так:

 – *будет 68* [2].

Математические папирусы, как упоминалось выше, написаны скорописным иератическим шрифтом. На рисунке 1 показано, как в иератике прописывались цифры:

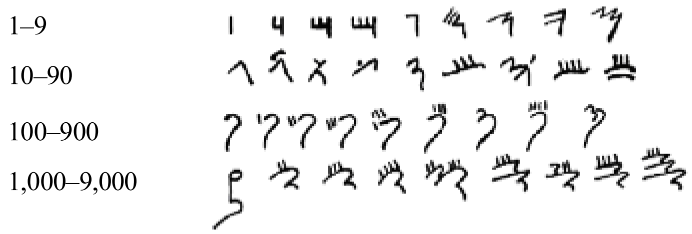


Рис. 1. Иератические знаки для обозначения цифр [3]

По результатам дешифровки указанных математических текстов сложилось общее представление об основах египетской математики, которое, так или иначе, разделяют почти все специалисты. Известно, что система счисления была десятичной, имелось четыре арифметических действия: сложение, вычитание, деление и умножение. Сложение и вычитание осуществлялись обычными способами, не отличающимися от современных арифметических операций. Умножение и деление производились через сложение путем удваивания. Для этого составлялись таблицы удвоения. Таблица удвоения составлялась в процессе любого вычисления, а кроме того существовали большие сводные таблицы, служившие справочными пособиями по основным видам вычислений. При делении старались найти число, на которое необходимо умножить делитель, чтобы получить делимое, опять же по таблице через операцию сложения.

Например, умножим 8 на 16 так, как это сделали бы египтяне:

1	8
2	16
4	32
8	64
16	128

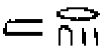
Нам приходится удваивать каждую сторону таблицы до тех пор, пока мы не получим требуемый результат. Деление производилось таким же образом, только в обратном порядке. Чтобы разделить 96 на 8, мы будем удваивать 8 (правая колонка той же таблицы), пока не получим два числа, которые в сумме дают 96. Такими числами будут 32 и 64. Соответствующие числа в левом столбце таблицы, которые мы, конечно, тоже удвоили, как и правый столбец, – это 8 и 4. Числа 8 и 4 в сумме дают 12, – это и есть ответ.

О. Нейгебауэр двояко оценивает эту особенность египетской системы вычислений: «Очевидно, в умах египтян никогда не возникало вопроса, всегда ли этот процесс применим. К счастью, всегда; и занятно видеть, как современные вычислительные машины снова используют этот “двоичный” принцип умножения» [4]. Вся египетская техника вычислений строилась на таком «двоичном» принципе, при этом дробные величины не были исключением.

В египетских текстах дроби в начертании не имели привычных нам числителя и знаменателя. Дробные величины, встречающиеся в повседневной жизни (выражаясь иначе, группа натуральных дробей), имели специальные обозначения:

 - 1/2;  – 2/3;  – 3/4.

Египетская система дробей характеризовалась тем, что все дроби должны были сводиться к единице в числителе. Так, основные дроби с числителем, равным единице, обозначались словом «часть» –  (*r*), надписанным над цифрой. Операции с дробями также осуществлялись по таблицам, где умножение и деление производились удвоением. Есть сведения, что в одной еще не опубликованной демотической рукописи обнаружена дробь 6/11 [5]. Видимо, в обычных вычислениях египтяне все же стремились выражать числа дробями только с числителями, равными 1.

Вот пример подобной процедуры:  – 7/12 = 1/2 + 1/12 [6].

Некоторые таблицы составлялись специально, для того чтобы найти необходимое сочетание дробей с числителем 1 для каждого конкретного случая. Если писцу надо было удвоить 1/9, он просто смотрел в таблицу и находил, что ответ равен 1/5 + 1/18, либо производил вычисления самостоятельно, прибегая к помощи вспомогательных «красных» чисел, о которых ниже мы расскажем более подробно.

В качестве единиц измерения использовались пальцы, ладони и локти. Например,  – 8 локтей [7]. В периоды Древнего и Среднего царств царский локоть соответствовал примерно 51,5 см. Система локтей как мер длины применялась не только в математике, но и в обыденной жизни. В одном локте было семь ладоней, а в каждой ладони – четыре пальца.

Математические папирусы содержат в основном таблицы и конкретные примеры. Никаких обобщающих теорем в этих папирусах не обнаружено. Это обстоятельство сыграло решающую роль в определении научного статуса всей древнеегипетской математики. Если резюмировать мнения исследователей, то вердикт оказывается примерно следующим: «Все эти тексты, в общем, однотипны: здесь нет ни теоретических исследований, ни постановки проблемы» [8]. Сегодня принято считать, что большинство задач возникало из практических потребностей, продиктованных хозяйственными нуждами, и египетская математика за весь период своего существования не смогла вырваться за рамки элементарной арифметики. Одним из первых эту позицию сформулировал авторитетный исследователь и переводчик древних математических и астрономических текстов немецкий профессор О. Нейгебауэр. При этом он заметил: «Тот факт, что египетская математика не внесла сколько-нибудь заметного вклада в развитие математических знаний, не означает, что она не представляет интереса для историка» [9].

О том, что египетская математика носила утилитарный характер, свидетельствуют некоторые документы, однако очень скромное количество собственно математических текстов, которые оказались доступными специалистам для изучения, не проливает свет на общий уровень развития математических наук в Древнем Египте. В качестве примера исключительно практической направленности математических интересов египтян часто приводится письмо одного писца другому из папируса Анастаси № 1, однако это лишь один из примеров частной переписки, а не научно-математический трактат:

> «Должно сделать насыпь для подъема в 730 локтей длины и 55 локтей ширины; она состоит из 120 отдельных ящиков и покрывается перекладинами и тростником. На верхнем конце она имеет высоту в 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон ее – дважды по 15 локтей, а настил – 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: “Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это для нас поскорей. Смотри, имя твое славится. Сколько же надо для этого кирпичей?”» [10].

И все же, несмотря на нелестные отзывы о египетской математике со стороны современных исследователей, в античном мире за египтянами признавались большие достижения в этой области. Попытаемся рассмотреть доступные нам факты на примере двух наиболее значимых математических текстов: папируса Ринда (рис. 2) и Московского математического папируса.

Наиболее изученным и самым большим по размеру является папирус Ринда, или, как еще его называют, папирус Ахмеса, – по имени писца скопировавшего текст с более древнего источника. В своих заметках Ахмес указал, что папирус был скопирован с образца, восходящего к оригиналу времен Среднего царства. Все остальные известные нам тексты математического содержания также относятся к эпохе Среднего царства.

Таким образом, мы можем надеяться, что по папирусу Ахмеса можно будет ознакомиться с основными началами египетской математики той эпохи. Уже в наше время папирус был назван в честь английского египтолога А.Г. Ринда, который приобрел его в Луксоре и затем передал в коллекцию Британского музея.

Рис. 2. Папирус Ринда [11]

Восемьдесят задач папируса Ринда излагаются в определенном порядке – от более простых к более сложным, и, таким образом, самые трудные из них находятся в конце документа. Вероятно, папирус мог служить в качестве учебного пособия для преподавания математики в школе писцов [12]. Наиболее интересны для нас задачи, где производятся вычисления с основными дробями, так как именно операции с дробными величинами дают представление о поразительной точности (без всяких «приближений») египетских арифметических вычислений.

Как уже упоминалось, умножение и деление у египтян сводились к процедурам сложения и вычитания, а последние осуществлялись методом удвоения. Эта методика применялась и в отношении основных дробей, только в обратном порядке: дроби с четным знаменателем удваивались делением знаменателя пополам, дроби со знаменателем, делимым на 3, удваивались методом разложения на сумму основных дробей с кратным тройке знаменателем. Стандартное вычисление с удвоением дроби 1/12 имело бы следующий вид:

1	1/12
2	1/8+1/24
4	1/4+1/12
8	1/2+1/8+1/24

Здесь следует пояснить технические аспекты процедуры удвоения. Для разложения на сумму основных дробей египтяне применяли так называемые «красные», вспомогательные числа. В текстах они обычно отмечались красными чернилами. Вспомогательные числа – это числа, на которые нужно умножить или разделить знаменатель неосновных дробей, чтобы привести их к виду $1/n$. В данном случае они будут соответствовать числителям дробей, которые мы в процессе разложения приводим к единому знаменателю.

Рассмотрим последнюю строку нашей колонки детально, указав вспомогательные цифры в скобках:

$$8/12 = 16/24\ (2) = 6/24\ (6) + 6/24\ (6) + 3/24\ (3) + 1/24 =$$
$$= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/24 = 1/2 + 1/8 + 1/24.$$

Сначала мы умножили нашу дробь на «красное» число 2, чтобы получить в числителе цифру, дающую сумму чисел, кратную 3. Затем получили сумму дробных величин, кратных 3, и с помощью вспомогательных чисел 6 и 3 привели их к виду $1/n$.

Более сложные примеры применения метода вспомогательных чисел мы как раз находим в папирусе Ринда. Это задачи на дополнение суммы дробей до 1, например задача № 21:

«Чем 2/3 + 1/15 дополняется до 1?» [13].

Здесь решение такое: приводим данные нам величины к общему знаменателю, умножив 2/3 на 5. «Красные», вспомогательные, числа, каковыми в этом случае являются 10 и 1, соответствуют числителям полученных дробей, если привести последние к общему знаменателю. Далее, чтобы получить ответ, нам следует прибегнуть к операциям сложения и вычитания: $10/15 + 1/15 = 11/15 \rightarrow 15/15 - 11/15 = 4/15$. Ответ легко приводится к сумме дробей с единицей в числителе: $4/15 = 3/15 + 1/15 = 1/5 + 1/15$.

Понять этот метод совсем нетрудно. Мы и по сей день применяем вспомогательные числа, когда производим деление «в столбик», как нас обучили в школе, или делаем вычисления «в уме». При помощи египетского метода «красных» чисел, в сущности, можно производить арифметические вычисления любой степени сложности.

О. Нейгебауэр полагает подобную манеру счета проявлением примитивизма, но на наш взгляд, эта система отражает такие черты египтян, как стремление к предельной точности и консерватизм. Египетские вычисления не дают приближенных значений, которыми пронизана, например, вся вавилонская математика. Результаты вычислений безукоризненно точны. По мнению О. Нейгебауэра, вавилонская техника счета не в пример совершеннее египетской, и он даже объявляет вавилонян создателями алгебры, однако возникает резонный вопрос: как вавилонянам удалось создать алгебру, путаясь в элементарных арифметических расчетах?

Возвращаясь к математике Египта, зададимся другим вопросом: как поступали египтяне, если приходилось иметь дело, допустим, с дробью 2/67, знаменатель которой не делился на 2 или на 3? В самом начале папируса Ринда приведена таблица деления дробей, которая в литературе получила название «таблица $2/n$». В ней записаны результаты деления 2 на нечетные величины от 3 до 101, при этом результат выражается, как и во всех других случаях, суммой единичных дробей. Продемонстрируем сам принцип на простых примерах из таблицы:

$$2/5 = 1/3 + 1/15 = 5/15 + 1/15 = 6/15 = 0{,}4 = 2/5;$$
$$2/25 = 1/15 + 1/75 = 5/75 + 1/75 = 6/75 = 0{,}08 = 2/25.$$

А теперь возьмем не самый простой пример, выполнив вычисления на обычном калькуляторе:

$$2/49 = 1/28 + 1/196 = 7/196 + 1/196 = 8/196 = 0{,}0408163 \text{ и т.д.} = 2/49.$$

Точность составления таблицы, если учесть древность ее происхождения потрясающая, и вместе с тем оперировать египетскими дробями проще, чем той необозримой вереницей цифр, которую рассчитывает современный калькулятор.

Суммы дробей 2/*n* также получали при помощи операций со вспомогательными числами, только в этом случае сумма дробей становится более многосложной и некоторые величины приобретают мизерные значения.

О. Нейгебауэр, человек, искушенный в арифметике и скептически настроенный в отношении математических талантов древних египтян, все же так и не смог провести разложение 2/101 по предполагаемой им схеме и констатировал: «Я считаю возможным, что в этом единственном случае исключения перед нами – добавление переписчика рукописи» [14].

N	***2/N***	***N***	***2/N***	***N***	***2/N***
3	2+6	**37**	24+111+296	**71**	40+568+710
5	3+15	**39**	26+78	**73**	60+219+292+365
7	4+28	**41**	24+246+328	**75**	50+150
9	6+18	**43**	42+86+129+301	**77**	44+308
11	6+66	**45**	30+90	**79**	60+ 237+316+790
13	8+52+104	**47**	30+141+470	**81**	54+162
15	10+30	**49**	28+196	**83**	60+332+415+498
17	12+51+68	**51**	34+102	**85**	51+255
19	12+76+114	**53**	30+ 318 +795	**87**	58+174
21	14+42	**55**	30+330	**89**	60+356+534+890
23	12+276	**57**	38+114	**91**	70+130
25	15+75	**59**	36+236+531	**93**	62+ 186
27	18+54	**61**	40+244+488+610	**95**	60+380+570
29	24+58+174+232	**63**	42+126	**97**	56+679+776
31	20+124+155	**65**	39+195	**99**	66+198
33	22+66	**67**	40+335+736	**101**	101+202+303+606
35	30+42	**69**	46+138		

(В таблице приведены только знаменатели, числитель во всех случаях равен 1.)

И в Московском математическом папирусе, и в папирусе Ринда содержится некое абстрактное число, которое исследователи сравнивают с математической переменной x, – «аха» [15]. Предположительно, с этим знаком связаны решения уравнений с одним неизвестным. Пример применения «аха» дан в задаче № 37 папируса Ринда:

> «Три раза вхожу я в меру; моя третья часть и треть моей трети и моя девятая часть добавляются ко мне, и вот я уже выхожу целым. Чем же буду я, говорящий тебе это?».

Данный текст можно выразить в виде следующего уравнения:

$$3x + 1/3x + 2/9x = 1.$$

В начале решения через таблицу удвоения мы находим необходимую нам сумму, где дроби имеют единицу в числителе:

$$3 + 1/3 + 2/9 = 3 + 1/3 + 1/6 + 1/18, \text{ так как } (1/9 + 1/9 = 1/6 + 1/18) =$$
$$= 3 + 1/2 + 1/18, \text{ так как } (1/6 + 1/3 = 1/2).$$

Затем мы должны разделить 1 на полученную сумму и с этой целью составляется еще одна таблица:

1	3+1/2+1/18
1/2	1+1/2+1/4+1/36
/1/4	1/2+1/4+1/8+1/72
1/8	1/4+1/8+1/16+1/144
1/16	1/8+1/16+1/32+1/288
/1/32	1/16+1/32+1/64+1/576

В результате деления получается 1/4+1/32, – это ответ, так как суммы дробей в строках таблицы дают целую единицу:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/72 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/576 = 1.$$

Затем производится проверочное вычисление: 1/4+1/32 умножается на 3, от этого числа берется третья часть, далее – третья часть этой трети и девятая часть, пока не выясняется, что сумма действительно равна 1. В виде алгебраического уравнения это выглядит так:

$$3x + 1/3x + 1/3 \times 1/3x + 1/9x = 1 \ [16]$$

или

$$3x + 1/3x + 2/9x = 1.$$

В первой задаче Берлинского папируса № 6619 [17], где решение построено на введении переменной «аха», помимо этого присутствует процедура извлечения квадратных корней:

«Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть 1/2 + 1/4 (3/4), стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это».

И далее приводится решение:

«Возьми квадрат со стороной 1, и возьми 1/2 + 1/4 от 1, то есть 1/2 + 1/4 в качестве стороны второй площади. Помножь 1/2 + 1/4 на самого себя; это дает 1/2 + 1/16. Поскольку сторона первой площади взята за 1, а второй за 1/2 + 1/4, то сложи обе площади вместе; это даст 1+1/2+1/16. Возьми корень отсюда: это будет 1+1/4. Возьми корень из данных 100: это будет 10. Сколько раз входит 1 + 1/4 в 10? Это входит 8 раз».

Следующий отрывок текста сильно испорчен, но ответ уже и без него очевиден: $8 \times 1 = 8$ и $8 \times (1/2 + 1/4) = 6$. Шесть и восемь – ответ задачи.

В папирусе Ринда демонстрируются операции с арифметической и геометрической прогрессиями, вычисляются площади треугольников, прямоугольников и трапеций.

Московский математический папирус попал в Россию благодаря В.С. Голенищеву, который в 1884–1889 гг. на личные средства производил археологические исследования в Египте и собрал огромную коллекцию египетских древностей. В настоящее время папирус хранится в Музее изобразительных искусств им. А.С. Пушкина в Москве. Из Московского папируса чаще других рассматривается задача на нахождение объема усеченной пирамиды. В.В. Струве в своем издании Московского папируса [18] указал на чисто алгебраическую сущность постановки вопроса в этой задаче. Текст задачи М14 сопровожден чертежом с пометками. Перевод с египетского выполнен В.В. Струве:

«Сложи вместе эти 16 с этими 8 и 4, ты получишь 28. Вычисли 1/3 от 6. Ты получишь 2. Умножь 28 на 2. Ты получишь 56. Смотри: он равен 56. Ты нашел правильно» [19] (рис. 3).

Рис. 3. [21]

Это, наверное, единственный отрывок из всего древнеегипетского наследия, в отношении которого О. Нейгебауэр не применял уничижительных характеристик: «Самым блестящим достижением всей египетской математики вообще является правильная формула для объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями (М14):

$$V = h/3\ (a^2 + ab + b^2)$$

(a, b – длины сторон оснований, h – высота). В этой формуле прежде всего, поражают две вещи: с одной стороны, ее симметричный вид, а с другой – ее математическая точность. Дело в том, что как раз для получения этой формулы, если только вывод сделан правильным способом, безусловно необходимо оперировать с бесконечно малыми, т.е. выйти за пределы элементарной геометрии» [20].

Здесь О. Нейгебауэр наделяет египтян умением производить совсем не «примитивные» алгебраические преобразования. (Эпитетом «примитивный» Нейгебауэр обычно характеризует в своих работах уровень развития египетской математики.) Если мы примем на веру его трактовку задачи М14, изложенную выше, то нам придется признать, что уровень развития египетской математики был достаточно высоким. Однако Нейгебауэр не вполне последователен, и в своей же статье «Геометрия в египетских математических текстах» он даже не сделал попытки воспроизвести решение по нахождению объема усеченной пирамиды, мотивируя это тем, что для правильного решения этой задачи необходима инфинитезимальная [22] процедура и абсолютно невозможно, чтобы такая сложная процедура была известна египтянам. На этом основании Нейгебауэр приходит к выводу, что решение получено путем ошибки, а поиск подобных ошибок – занятие праздное и бессмысленное [23].

Много споров вызывает одно из самых впечатляющих достижений египетской математики – полученное египтянами значение для числа π. Так, например, Б.А. Тураев пишет: «Среди довольно примитивных математических вычислений нельзя не отметить довольно значительной точности в определении числа π в окружности…» [24]. А вот другое мнение: «Любопытно, что они не знали числа π, т.е. отношения длины окружности к диаметру. При вычислении площади круга они решали вопрос о квадратуре круга, т.е. эмпирическим путем подбирали квадрат, по площади равновеликий площади круга» [25]. Между тем величина π, засвидетельствованная в египетских текстах, получалась возведением в квадрат 8/9 его диаметра:

$$\pi \approx 4\,(8/9)^2 = 3,\,1605\ldots$$

Это соотношение зафиксировано в нескольких задачах, и даже при отсутствии доказательств нелепо предполагать, что египтяне каждый раз при необходимости вычислить площадь круга эмпирическим путем подбирали квадрат, равновеликий ему по площади.

Но все же самым спорным фрагментом среди всех египетских математических текстов является задача М10 (рис. 4). Первым переводчиком и интерпретатором этой задачи был академик В.В. Струве, который установил, что в ней содержится метод вычисления площади полусферы**.** У этой точки зрения есть множество противников, в том числе одним из наиболее непримиримых является О. Нейгебауэр. «Было даже объявлено, – пишет он, – что в одном примере из Московского папируса правильно определена площадь полушария, но текст допускает гораздо более примитивное истолкование, представляющееся более правдоподобным» [26].

Текст задачи М 10 в переводе В.В. Струве имеет следующий вид:

«Способ вычисления корзины, если тебе назовут корзину с отверстием 4 1/2 в цельности. О, дай мне узнать ее поверхность. Вычисли 1/9 от 9, ибо корзина представляет половину яйца. Получается 1. Вычисли остаток 8. Вычисли

1/9 от 8. Получится 2/3 + 1/6 + 1/18. Вычисли остаток от этих 8 после отнятия этих 2/3 + 1/6 + 1/18. Получается 7 + 1/9. Считай 4 1/2 раза с 7 + 1/9. Получается 32. Смотри, вот ее поверхность. Ты нашел правильно» [27].

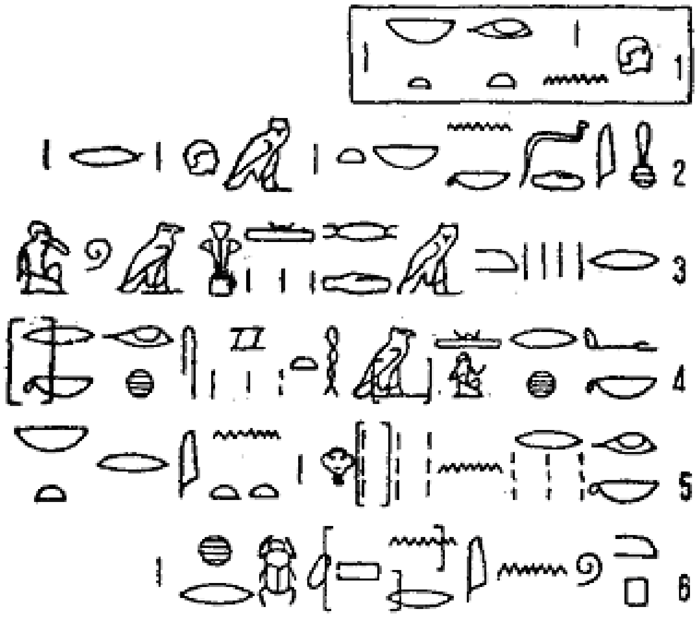


Рис. 4. Задача № 10 из Московского папируса [28]
(в скобках – утраченные фрагменты текста; текст читается справа налево)

Основное числовое данное текста М10, на операциях с которым строится все решение – это величина 4 1/2:  . По толкованию Струве, величина 4 1/2 – это диаметр большой полусферы (корзины). Для выведения формулы мы обозначим его как *a*. Выводится следующая формула, где *a* – это 4 1/2:

$$F = ((2a - 1/9\ 2a) - 1/9(2a - 1/9\ 2a))\ \mathrm{a} \approx 1/2\ a^2\pi.$$

Совсем другое толкование текста дал Т.Е. Пит [29]. Он допустил, что из-за нерадивости египетского писца в текст вкралась ошибка и благодаря этому странному стечению обстоятельств стали возможными перевод и интерпретация, предложенные Струве. Откорректировав текст, Пит пришел к выводу, что «корзину» можно понимать как полуцилиндр, а переписчик по рассеянности не добавил к обозначенной величине 4 1/2 еще одну точно такую же. По предположению Пита, в тексте должно было быть не одно число a со значением 4 1/2, а два числа – a и d, имеющие одинаковое значение 4 1/2. Величину a, таким образом, следовало бы считать высотой полуцилиндра, а предполагаемую в качестве допущения величину d – диаметром круга. Приняв все эти допущения, можно получить правильную формулу для боковой поверхности полуцилиндра:

$$F = a\,(8/9)^2\,2d\,.$$

О. Нейгебауэр не принял толкование В.В. Струве из-за того, что оно не соответствовало его собственному представлению об уровне развития всей египетской математики: «В случае М 10 я лично считаю реконструкцию текста, предложенную Питом, по которой даны две величины, значительно более вероятной» [30]. Поддержав версию Пита, сам Нейгебауэр предлагает совсем другой вариант рассмотрения этой задачи. Он считает, что под «корзиной» подразумевается куполообразный амбар для хранения зерна, и указывает, что вычисление в данном случае могло быть только приближенным: «Я предложил несколько иное толкование, исходя из того, что единицами, в которых выражены размеры в этой задаче, должны быть, следуя общему правилу, локти; а при таком толковании "корзина" получит чрезмерно большие размеры. Поэтому мне кажется, что имеет кое-что за себя предположение, по которому здесь речь идет о вычислении поверхности (количестве потребного материала на покрытие) одного из тех куполообразных амбаров, которые известны нам по целому ряду египетских изображений» [31].

Перевод В.В. Струве, на наш взгляд, заслуживает большего доверия, хотя бы потому, что автор не использует конъектуры и допущения об ошибке писца. Ссылаясь на ошибки переписчика, этот текст при желании можно будет прочитать вообще как ремесленную инструкцию по плетению корзин, но подобные допущения явно проистекают из изначальной предвзятости по отношению к уровню развития математических вычислений в Древнем Египте. Предвзятое отношение ярко демонстрирует сам Нейгебауэр, ведь как специалист в точных науках он не мог не заметить, что даже если принять версию Пита, интерпретация Струве сохраняет свою актуальность. С.Я. Лурье по поводу позиции Нейгебауэра пишет: «Нельзя, например, считать серьезной ссылку на то, что “такая формула принципиально и резко противоречила бы всему тому, что мы знаем об уровне египетской математики, и данным всего прочего материала источников”» [32]. Также по этому поводу он отмечает: «Я не сомневаюсь, что и формулу объема усеченной пирамиды (если бы папирус допускал какую бы то ни было возможность другого толкования) Нейгебауэр считал бы несоответствующей уровню египетской геометрии. Эти рассуждения – типичное *petitio principia*: мы, в сущности, ничего не знаем о возможностях египетской математики и должны быть готовы ко всяким неожиданностям» [33].

По тем литературным источникам, которые имеются в распоряжении египтологов, действительно можно заключить, что египтяне были людьми практического склада мышления, как, впрочем, и большинство древних народов. Вероятно, фраза «наука ради науки» была бы непонятной египетскому математику, однако не исключено, что он понял бы сентенции «наука ради постижения божественных истин» или «наука ради достижения величия». Если разобраться, все эти три цели не так уж далеко отстоят друг от друга, и не столько они различаются по существу, сколько их разделяет время.

Если попытаться суммировать мнения историков об успехах египтян в области геометрии, то можно увидеть, что здесь позиция исследователей намного благожелательнее, нежели в отношении их алгебраических познаний. Отчасти это объясняется единодушием античных мыслителей, таких как Аристотель, Геродот, Прокл и многих других, которые считали родиной геометрии именно Египет, но они, к сожалению, не оставили никаких конкретных описаний, а лишь краткие упоминания. Проблема заключается в том, что не существует текстуальных свидетельств из первоисточников о высоком уровне развития геометрии в Древнем Египте. Даже те немногие сохранившиеся документы, о которых говорилось выше, интерпретируются слишком неоднозначно. «Нам остается, как мне кажется, – пишет Б. Ван-дер-Варден, – только две возможности: либо мы отвергаем утверждения Аристотеля, Геродота и Евдема как совершенно недостоверные, либо мы предполагаем вместе с греческими авторами, что в Египте во времена Фалеса существовала настоящая геометрия» [34]. Вопрос о наличии задач более высокого уровня в древнеегипетской математике остается совершенно открытым, но «несомненно, что составители текстов знали больше, чем сказано в самом тексте» [35].

Теоретическое доказательство как обоснование знаний, т.е. эмпирических расчетов и задач, отсутствует в египетских и вавилонских текстах. В Греции в период, к которому относятся все рассматриваемые нами упоминания античных авторов, оно было естественной сопроводительной нормой изложения любых математических идей. Тем не менее мы встречаем многочисленные ссылки на высокий уровень и даже превосходство египетских математиков, и прежде всего, в области геометрии, над греческими, причем в понимании самих же греков. Вот отрывок из Диодора (I, 96, 2): «Египетские жрецы рассказывают на основании записей в их священных книгах, что и абдерит Демокрит прибыл к ним…» [36], – и далее утверждение самого Демокрита, согласно Клименту Александрийскому (Строматы I, 15, 69): «Я объездил больше земли, чем кто-либо из современных мне людей, подробнейшим образом исследуя ее; я видел больше, чем все другие, мужей и земель и беседовал с наибольшим числом ученных людей. И никто не обличил меня в ошибках при складывании линий, *сопровождающемся доказательством* (выделено нами. – *И.Л.*), – даже так называемые гарпедонапты у египтян. Включая пребывание у последних, я провел на чужбине около восьми лет» [37]. Мы не напрасно выделили слова «сопровождающемся доказательством», так как именно это словосочетание однозначно указывает на тот факт, что египтяне не только использовали доказательство в своих геометрических построениях, но и, как следует из текста, были наиболее сведущими в этой области математики среди всех, кого встречал Демокрит в своих путешествиях.

На сегодняшний день в философии и истории науки базовой и общепринятой является точка зрения, согласно которой именно греческая натурфилософия впервые обращается к доказательству как способу обоснования знания, тем самым закладывая основы научной теории. Отсутствие теоретических построений – наиболее слабое звено в том явлении, которое мы называем протонаукой, и оно оказывается непреодолимой границей между античной наукой и древневосточной «мудростью».

Не только Демокрит посещал Египет с целью получения хорошего образования. Мы находим многочисленные ссылки на путешествия в Египет очень многих греческих философов. Например, вот что писал Прокл в комментариях к «Началам» Евклида: «Как торговля и деловые отношения среди финикийцев послужили началом точной науки о числах, так указанные причины привели к возникновению геометрии среди египтян. Эта наука была впервые принесена в Грецию Фалесом после его египетского путешествия» [38].

Известен факт, что Пифагор проходил первоначальное обучение в Египте и Месопотамии у «жрецов» и «халдеев», как упоминает Диоген Лаэрций, а у Ямвлиха можно найти уточнение, что он 22 года провел в египетских храмах, изучая астрономию и геометрию. Однако этот факт оспаривается, в частности, Д. Диксом, который относит данные сведения к области легенд [39].

Даже если отдельные упоминания, встречающиеся у древних авторов, не вызывают доверия у исследователей, их количество слишком велико, а смысл утверждений вполне однозначен, чтобы кто-либо смог в полной мере отнести их «к области легенд». Оценочное восприятие этой бинарной арифметики, видимо, зависит от личных пристрастий, тем не менее следует отметить, что египетские математические принципы не исчезли бесследно. При всей своей оригинальности египетская система счисления имеет аналоги в современных системах счисления. Это стало очевидным с появлением вычислительной техники, принципы работы которой базируются на бинарных числовых рядах, т.е., в сущности, соотносятся в какой-то мере с египетскими арифметическими методами двоичных вычислений.

Египетский метод арифметических расчетов, как уже говорилось выше, радикально отличался и от греческого, и от вавилонского и был построен на принципах бинарности. Все математические операции осуществлялись при помощи удвоения числовых значений для их последующего сведения к процедурам сложения или вычитания. В литературе часто встречается утверждение, что египетские методы вычислений были очень громоздкими и что египтяне только использовали когда-то и кем-то составленные таблицы, не производя самостоятельных вычислений. Это утверждение, на наш взгляд, неверное. Бинарный арифметический метод – действительно не самый короткий путь вычисления, но, наверное, более точный в отношении получаемых результатов в сравнении с параллельно существовавшими методиками. Заранее составленные таблицы, дающие числовой результат вычислительных операций, по-видимому, использовались в основном чиновниками с целью экономии времени, но, владея принципом бинарных вычислений, грамотный египтянин был способен составить их самостоятельно, так же как любой современный школьник при необходимости сможет составить таблицу умножения.

В основе бинарной арифметики лежит принцип сведения к целому, где целым является самое большое числовое значение, заданное в условиях вычисления и принимаемое за исходную единицу. И для деления, и для умножения мы можем воспользоваться одной таблицей удвоения. Предположим, нам необходимо умножить 17 на 16 и разделить 400 на 16. Возьмем таблицу:

1	16
2	32
4	64
8	128
16	256
32	512
64	1024

При операции умножения в первой колонке мы находим любую сумму или разность, дающую в результате 17, и соответственно сумму или разность чисел во второй колонке. Это будет: 16 + 1 // 256 + 16 = <u>272</u> или 16 + 2 – 1 // 256 + 32 – 16 = <u>272</u>, т. е. 16 × 17 = 272. Деление осуществляется точно так же, только теперь мы будем искать любую сумму или разность, дающую 400 во второй колонке, чтобы затем произвести аналогичные операции в первой колонке и получить искомую величину. Это будет:16 + 128 + 256 //1 + 8 + 16 = <u>25</u> или 1024 – 512 – (128 – 16) // 64 – 32 – (8 – 1) = <u>25</u>, т.е. 400: 16 = 25.

При операциях с дробями главным методом была техническая процедура приведения дроби к виду единичной. Продемонстрируем этот метод на примере из таблицы деления 2 на нечетные величины от 3 до 101:

2 : 27   2/27 × 2 = 4/54 = 1/54 + 3/54 = 1/54 + 1/18;
2 : 65   2/65 × 3 = 6/195 = 1/195 + 5/195 = 1/195 + 1/39;
2 : 77   2/77 × 4 = 8/308 = 1/308 + 7/308 = 1/308 + 1/44.

В данном случае множители подставлены нами для удобства восприятия. Египтяне же получали все значения методом удвоения, опираясь на положение, что если необходимо получить из четного удвоенного числа нечетное, всегда можно вычесть или прибавить условную единицу. Формально этот принцип можно отобразить в виде следующего соотношения: $2x N \pm 2y N \pm N,$ где x и y – коэффициенты удвоения, а N – величина удвоения. Процедура сведения всех дробей к виду единичных открывала перед египтянами «оперативный простор» для манипулирования дробными величинами как целыми числами. Об этом говорит и тот факт, что числители они даже не прописывали.

В основе египетской двоичной системы счисления и современных электронных систем счисления, как это ни парадоксально на первый взгляд, лежит единый математический принцип. Бурное развитие электронно-вычислительной техники началось примерно в 40-х годах XX в., с создания первых электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) с программным управлением. Применение электронных машин существенно расширило возможности математических вычислений, которые ранее были невыполнимыми, так как требуемое для этого время превышало все разумные пределы. Уже к 1965 г. в мире насчитывалось свыше 50 тыс. цифровых вычислительных машин различного назначения. Разработки в области полупроводниковых приборов позволили повысить в сотни и тысячи раз их быстродействие и объемы памяти [40]. Современная компьютерная техника в своем развитии уже ушла далеко вперед от образцов цифровых вычислительных машин середины XX в., но в ее работе используется тот же двоичный математический принцип обработки и хранения информации, что и в первых ЭЦВМ.

Электронная бинарная система счисления изначально была построена на позиционном принципе записи чисел с основанием 2. В этой системе используется только два знака – для обозначения цифр 0 и 1, и, как и в любой другой позиционной системе, значение цифры зависит от занимаемого ею места. Так, например, число 2 считается единицей второго разряда и записывается как 10, а читается как «один; ноль». Каждая единица следующего разряда в два раза больше предыдущей, т.е. эти единицы составляют последовательность чисел 2, 4, 8, 16, ..., $2n$, ... Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, перевести в запись для электронной бинарной системы счисления, его последовательно делят на 2 и записывают получающиеся остатки как 0 и 1 в последовательности от последнего значения к первому, т.е. в обратном порядке.

Продемонстрируем на конкретном примере как число из десятичной системы переводится в электронную бинарную систему счисления:

$$
\begin{aligned}
45 &= 22 \times 2 + 1 \\
22 &= 11 \times 2 + 0 \\
11 &= 5 \times 2 + 1 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}
$$

Следовательно, электронная бинарная запись числа 45 – это 101101. Можно заметить, что здесь, как и в египетской математике, действие умножения сводится к многократным прибавлениям множимого, а деление – к вычитанию. Все произведенные нами процедуры в точности соответствуют описанным нами во второй и третьей главах, математическим операциям египтян. Во всяком случае, использование единого математического принципа древними египтянами и создателями современной электронной вычислительной техники очевидно.

Но почему же современные математики, создававшие первые ЭЦВМ, в качестве базового принципа использовали именно метод арифметического удвоения? Как это ни удивительно, из-за его простоты и удобства. В бинарной системе счисления быстро и легко выполняются все арифметические действия, существенно упрощаются и все логические операции. Цифровая вычислительная машина должна иметь цифровые элементы, обладающие конечным числом устойчивых состояний, и это число должно быть равно числу цифр той системы счисления, в которой работает программа. Благодаря тому, что принцип записи чисел имеет основание 2 и используются лишь две цифры, бинарная система счисления оказалась наиболее эффективной в теоретических построениях разработчиков электронных цифровых вычислительных машин. Единственное неудобство, связанное с использованием и египетской непозиционной, и компьютерной позиционной бинарной системы счисления, – это громоздкая запись значений. Число 45 нам пришлось записать шестью знаками.

Историки науки уже традиционно, описывая египетскую бинарную систему счисления, указывают на исключительно прикладной характер всех арифметических действий, производимых в рамках этой системы, и разве не поразителен тот факт, что спустя тысячелетия бинарный принцип счисления оказался наиболее применимым именно в теории математического программирования! Параллели, которые мы можем провести в данном случае между древнейшей математикой и математикой современной, никак не подкреплены научно-историческими или научно-философскими исследованиями. Две эти системы разделяет огромный промежуток времени, и нам ничего неизвестно об использовании оригинальной бинарной системы счисления в течение тысячелетий после угасания египетской культуры. Как справедливо заметил немецкий математик и философ Г. Вейль, «именно математику, который строгим и формальным образом оперирует понятиями своей развитой науки, следует время от времени напоминать о том, что первопричины вещей лежат в более темных глубинах, чем те, которые он в состоянии постичь своими методами. Задача постижения остается за пределами отдельных наук. Несмотря на обескураживающую чехарду философских систем, мы не можем отказаться от ее решения, если не хотим, чтобы знание превратилось в бессмысленный хаос» [41].

Примечания

1. Статус этих документов в отношении их репрезентативности не установлен. Иными словами, если бы от всей нашей эпохи осталось несколько ученических тетрадей и отрывков из учебников для средней школы, было бы трудно на основании этих документов судить о развитии математики в конце XX – начале XXI в.

2. См.: *Петровский Н.С.* Египетский язык. – Л., 1958. – С. 144.

3. См.: *Hatch R.A.* Egyptian numerals for integer values / University of Florida. Web-Version February 1999. [http://www.clas.ufl.edu/users/rhatch] 28.03.2005.

4. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. – М., 1968. – С. 85.

5. См.: *Очерки* истории естественно-научных знаний в древности. – М.: Ин-т истории естествознания и техники, 1982. – Т. 1. – С. 124.

6. См.: *Петровский Н.С.* Египетский язык. – С. 147.

7. Там же. – С. 145.

8. *Очерки* истории естественно-научных знаний в древности. – Т. 1. – С. 122.

9. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. – С. 84.

10. Цит. по: *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. – С. 90.

11. См.: *O'Connor J.J., Robertson E.F.* History topic: mathematics in Egyptian papyri // MacTutor History of Mathematics, December 2000 [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri.html] 25.05.2005/

12. См.: *Gillings R.J.* The recto of the Rhind mathematical papyrus: How did the ancient Egyptian scribe prepare it? // Archive for History of Exact Sciences. – 1974. – V. 12. – P. 291–298.

13. См.: *Ван-дер-Варден Б.* Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. И.Н. Веселовского. – М., 1959. – С. 34; *Peet T.E.* The Rhind mathematical papyrus. – Liverpool, 1923.

14. *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика / Пер. С.Я. Лурье. – М.; Л., 1937. – С. 171, 183. В таблице нет колонок, вставленных Нейгебауэром. Подробнее см.: *Neugebauer O.* Die Grundlagen der дgyptischen Bruchrechung. – Berlin: Julius Springer, 1926.

15. Иногда в литературе оно обозначается как «хау».

16. См.: *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика. – С. 129.

17. Подробнее об обоих примерах см.: *Ван-дер-Варден Б.* Пробуждающаяся наука... – С. 38–39.

18. См.: *Struve W.W.* Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schцnen Kьnste in Moscau. – B., 1930. Это единственное полное издание документа.

19. *Struve W.W.* Mathematischer Papyrus… – S. 157.

20. *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика. – С. 143–144.

21. Иллюстрация заимствована из БСЭ (М., 1970–1977). Статья «Папирусы математические»). Эл. версия на трех дисках. Д. 2

22. Инфинитезимальный – рассматриваемый в малом, бесконечно малом.

23. См. *Neugebauer O.* Die Geometric der дgyptischen mathematischen Texte // QSB. – 1930. – V. 1. – S. 414.

24. *Тураев Б.А.* Древний Египет. – СПб., 2000. – С. 73.

25. *Очерки* истории Древнего Востока: Сб. ст. / Под ред. В.В. Струве. – М., 1956. – С. 70.

26. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. – С. 90.

27. *Struve W.W.* Mathematischer Papyrus… – S. 157.

28. См.: *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика. – С. 148.

29. *Peet T.E.* A problem in Egyptian geometry // The Journal of Egyptian Archaeology. – 1936. – V. 47. – P. 100–154. См. также: *Id*. Mathematics in Ancient Egypt. – Manchester, 1931.

30. *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика. – С. 154.

31. Там же.

32. Там же. – С. 146.

33. *Лурье С.Я.* [Вступительная статья] // *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук: Т. 1. Догреческая математика. – С. 11.

34. *Ван-дер-Варден Б.* Пробуждающаяся наука: Рождение астрономии. – М., 1991. – С. 47.

35. *Очерки* истории естественно-научных знаний в древности. – Т.1. – С. 125.

36. Цит. по: *Лурье С.Я.* Демокрит: Тексты. Перевод. Исследования. – Л.: Наука, 1970. – С. 192.

37. Там же. – С. 191, 192.

38. *Прокл.* Комментарии к Первой книге «Начал» Евклида. – М., 1994. – С. 65.

39. См.: *Dicks D.R.* Early Greek astronomy to Aristotle. – Bristol, 1970. – P. 174.

40. Об истории возникновения вычислительной техники см.: *Информация*: Сб. ст. / Пер. с англ. А.В. Шилейко. – М., 1968; *Ледли Р.С.* Программирование и использование цифровых вычислительных машин. – М., 1966; *Sackman H.* Computers, system science and evolving society. – N.Y., 1967.

41. *Вейль Г.* Пространство, время, материя. – М., 1996. – С. 20.

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск

Litovka, I.I. **Mathematics of Ancient Egypt: paradoxes of binary calculation**

When describing Egyptian binary calculation, historians of science point out that all arithmetic operations realized within this calculation system are purely applied**.** Isn't it a striking fact that thousands years after binary calculation principle appeared to be used most frequently in the mathematical programming theory! Parallels between the ancient mathematics and the modern one, which may be made in this specific case, are in no way supported by scientific-historical or scientific-philosophical studies. There is a great period between these two systems and we know nothing about the use of the original binary calculation during thousand years after Egyptian culture has faded away.