

*Из архивов***ЦЕЛОЕ ЧИСЛО***Г. Фреге*

*От переводчика:* Эта небольшая работа Г.Фреге впервые была опубликована в 1895 г. (см.: *Frege G. Le nombre entier // Revue de Metaphysique et de Morale*. – 1895. – V. III). Автор отстаивает реалистическую позицию во взглядах на природу математики, лежащую в основании предложенной им программы логицизма. Аргументация развивается как критика современного Фреге формалистского подхода, приводящего к психологизму, и удачно дополняет критику, которую он дает в книге “*Die Grundlagen der Arithmetik*” (1884 г., русский перевод см.: *Фреге Г. Основоположения арифметики*. – Томск: Водолей, 2000) и предисловии к первому тому своего фундаментального труда “*Grundgesetze der Arithmetik*” (1893 г.).

Перевод осуществлен при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 03-03-00363) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-06-80359).

*В.А. Суровцев*

Я заметил, что данный журнал (“*Revue de Metaphysique et de Morale*”. – *Прим. перев.*) пытается согласовать математику и философию, и это представляется мне весьма ценным. Действительно, эти науки не могут не получить выгоду, обмениваясь идеями. Это побуждает меня вступить в дискуссию. Взгляды, выдвинутые мсье *Ballue* в майском номере журнала<sup>1</sup>, несомненно разделяются большинством математиков. Но они содержат логические затруднения, которые кажутся мне достаточно серьезными и заслуживающими того, чтобы быть выставленными напоказ,

<sup>1</sup> См. его статью “*Le nombre entier considéré comme fondement de l’analyse mathématique*”.

прежде всего потому, что они могут затемнить проблему и склонить философов к тому, чтобы более не беспокоиться об основоположениях арифметики. Для начала, по-видимому, следует указать на промах, часто встречающийся у математиков, который заключается в том, что они ошибочно рассматривают символы как объекты своих исследований. На самом деле символы суть только средство исследования, хотя и очень полезное, даже неизбежное, но не его объекты. Эти последние представлены посредством символов. *Очертания* знаков, их химические и физические свойства могут походить в большей или меньшей степени, но они не являются существенными. Нет символа, который нельзя было бы заменить другим символом с иными очертаниями и качествами, связи между вещами и символами являются чисто конвенциональными. Это относится к любой системе знаков и к любому языку. Несомненно, язык – мощное орудие человеческого духа, но один язык может быть столь же пригоден, как и другой. Поэтому нельзя переоценивать слова и символы, либо приписывая им псевдомагическую силу над вещами, либо ошибочно принимая их за действительные вещи, более или менее точными представителями которых, самое большее, они являются. По-видимому, на этой точке зрения едва ли следует настаивать, но статья мсье *Ballue*, вероятно, не защищена от подобной ошибки. Его тема – целые числа. Что они собой представляют? Мсье *Ballue* утверждает: “Множественности представленные символами, называются целыми числами”. Тогда целые числа являются символами, и об этих символах он намеревается говорить. Но символы не являются и не могут являться основанием математического анализа. Когда я записываю  $1 + 2 = 3$ , я выдвигаю суждение о числах 1, 2 и 3, а не о тех символах, о которых при этом говорится. Их я могу заменить на *A*, *B* и *C*; я могу написать *p* вместо + и *e* вместо =. Записывая *ApBeC*, я тогда выразил бы ту же самую мысль, что и ранее, но посредством иных символов. Теоремы арифметики никогда не относятся к символам, – они относятся к тому, что представлено символами. Верно, что эти объекты неосознаемы и невидимы, они даже нереальны, если реальным называют то, что может оказать или вызвать воздействие. Числа не подвержены изменениям, ибо теоремы арифметики охватывают вечные истины. Стало быть, мы можем сказать, что эти объекты находятся вне времени, а из этого следует, что они не являются субъективными представлениями или идеями, поскольку последние непрерывно изменяются в соответствии с психологическими законами. Арифметические законы не образуют часть психологии. Дело обстоит не так, как если бы каждый человек имел свое собственное число, называемое “*один*”

и образующее часть его души или его сознания. Под этим именем существует только одно число, одинаковое для каждого и объективное. Числа, стало быть, являются весьма странными объектами, объединяющими в себе внешне противоречивые качества объективности и нереальности. Но при более тщательном исследовании обнаруживается, что противоречия здесь нет. Отрицательные числа, дроби и т.д. имеют ту же самую природу, и, вероятно, поэтому слишком многое в арифметике устанавливается посредством символов. Из-за затруднений с отождествлением объектов, которые не различимы чувствами и не являются психологическими, вместо них подставляются видимые объекты. Но забывается, что эти символы не суть то, что мы хотим изучить. И поэтому числа наделяются двойной природой. Их называют символами, но, тем не менее, они представлены сами, им приданы имена. Мсье *Ballue* пишет: “Подобно всем символам целое число допускает двойную репрезентацию: звук, который воздействует на уши, впечатление, которое оказывает его написанное имя на зрительный образ... Кроме того, целое число предполагает свою собственную, отдельную репрезентацию, требующую использования особых значков, называемых *цифрами*. Цель цифрового обозначения заключается в том, чтобы изучить способы репрезентации всех целых чисел с наименьшим количеством слов и цифр”. Что же тогда обозначает цифра 2? Число, т.е., согласно мсье *Ballue*, символ. Будет ли это слово “два”? Если да, то мы, немцы, имели бы числа, которые отличались бы от чисел французов, а наша арифметика была бы наукой иной, чем у них, и имела бы другие объекты исследования. Вероятно, мнение мсье *Ballue* состоит в том, что слово “два” репрезентирует то же самое число, что и цифра 2. Но чем бы ни было это число, оно репрезентирует множественность и само репрезентируется цифрой 2. Чего тогда мы хотим от этого несколько загадочного посредника? Почему бы не обозначать множественность непосредственно цифрой?

Можно подумать, что это лишь оговорка со стороны мсье *Ballue*, которую легко можно скорректировать, подставив в названии его статьи “множественность” вместо “целое число”. Ибо, согласно мсье *Ballue*, целые числа суть символические представители именно множественностей. Но это не охранит нас от всех затруднений. Что такое множественность? Мсье *Ballue* отвечает: “Скопление нескольких особых объектов, рассмотренных как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов, называется *множественностью*. Будет видно, что множественность есть скопление единиц”.

Это определение не является ясным, как, по-видимому, думает автор. Относительно слова “множественность” можно было бы обнаружить, что его смысл содержится в слове “несколько” и во множественном числе, но мсье *Ballue* добавляет некоторые уточнения: “особые объекты, рассмотренные как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов”. То, что здесь он называет словом “особые”, прежде он называл словом “изолированные”: “Изолированным объектам, рассмотренным как изолированные, при отвлечении от их природы или очертаний, дается имя единицы”. Вероятно, можно возразить, что если объекты полностью изолированы, то не было бы никакого скопления. К тому же сомнительно, существуют ли полностью изолированные объекты, ибо каждый объект соотнесен с любым другим посредством гравитации. Поэтому следовало бы определить точную степень изоляции. Я не буду разрабатывать последний пункт, но хочу более подробно исследовать, что же подразумевает мсье *Ballue* под словами “рассмотренные как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов” и под словами “рассмотренные как изолированные, при отвлечении от их природы или очертаний”. Для меня удивительно здесь то, что способ рассмотрения объектов и абстракции, осуществленные в душе субъекта, кажутся производными от качеств объекта. Я спрашиваю: после того, как объект был рассмотрен как изолированный, остается ли он тем же самым объектом, что и ранее, или же при таком рассмотрении создается новый объект? В первом случае ничего существенного не произошло бы. И действительно, если я рассматриваю планету Юпитер как особую или изолированную, то ее гравитационные связи с другими небесными телами не становятся более слабыми. И если я отвлекаюсь от массы и сферических очертаний, Юпитер не теряет ни своей массы, ни сферических очертаний. Тогда что же осуществляется посредством такого отвлечения? Точно так же здесь возникают и психологические затруднения. Пока я рассматриваю объект, я могу быть в нем уверен. Но проводя доказательство, я последовательно фиксирую свое внимание на других объектах, ибо я не в состоянии одновременно рассматривать даже 100 объектов. Затруднение здесь в том, что, если объекты не сравнивать между собой, я не могу уделять внимание их природе или очертаниям. Таким образом, я утратил бы уверенность в том, что все эти объекты фактически являются единицами. Разумеется, они не были бы единицами по отношению ко мне. Быть может, они были бы таковыми по отношению к другим, но, вероятно, я ничего не знал бы об

этом. И даже если бы знал, это было бы бесполезным с точки зрения моего доказательства, ибо отсюда я ничего не смог бы вывести.

Орион – это скопление звезд. Для данного случая это было бы возможно, если в общем можно рассматривать объекты как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов. Следуя утверждению мсье *Ballue* и приняв его подход, мы говорили бы, что совокупность есть множественность. И поскольку имя “*Орион*” есть символ для этой множественности, мы рассматривали бы данное слово как число. Надо заметить, он не говорит, что звезды рассматриваются как особые объекты и т.д. Да ведь здесь и совершенно нехотать признавать, что совокупность есть множественность и что имя совокупности есть символ для множественности.

Проанализируем теперь альтернативную позицию, состоящую в том, что рассматриваемый объект отличается от изначального. Солнце, например, как материальное светящееся тело, имеющее очертания и занимающее место в пространстве, отличалось бы от Солнца, рассмотренного как особый объект в отвлечении от его природы и очертания. Можно было бы сказать, что последний создается посредством акта его рассмотрения и что, поскольку внешний объект не может быть создан таким способом, он был бы субъективной идеей или чем-то еще в душе человека, осуществляющего такое рассмотрение и такую абстракцию. Посредством такого рассмотрения Солнца, каждый создавал бы свою собственную идею, отличную от идеи кого-то другого. Множественность тогда также была бы субъективной. А это не совпадало бы с тем фактом, что естествоиспытатели дают объективные сведения, когда они определяют точное количество тычинок в цветке.

Каковым же может быть результат отвлечения от природы или очертания объекта? Утрачивает ли он свою природу или очертания? Представляется, что именно в этом заключается результат, полученный мсье *Ballue*. Но очевидно, что внешний объект не может быть изменен таким образом. Когда кто-то образует идею объекта для себя, нет нужды в отвлечении, для того чтобы *она* утрачивала качества самого объекта. Идея Солнца не является материальным светящимся телом. Но тем не менее эта идея в общем качественно отлична от идеи Луны у того же самого человека. Отвлечение, по мсье *Ballue*, может стереть различие между этими идеями. Но тогда что остается от множественности?

С этим тесно связано и другое затруднение. Мсье *Ballue* утверждает: “[*le*] Простейшая множественность образуется добавлением одной единицы к другой единице”. Но если имеется более чем две единицы,

тогда было бы несколько множественностей, образованных добавлением одной единицы к другой единице, и использование мсье *Ballue* определенного артикля в единственном числе было бы некорректным. Должно было бы быть: “[les] Простейшие множественности образуются и т.д.” Но число *два* не является ни особой множественностью такого типа, ни символом для такой множественности. Вероятно, более правильным было бы сказать, что оно является видом или классом множественностей, образованных добавлением одной единицы к другой единице. Но тогда, в согласии с требованием точности, нам нужны подходящие определения *единицы* и *множественности*. Читатели данного журнала легко обнаружат, что первый из этих терминов не используется авторами единообразно. Сравнивая утверждение мсье *Ballue* (“простейшая множественность образуется добавлением одной единицы к другой единице”) с тем, что говорят мсье *Le Roy* и мсье *Vincent* (в их совместной статье, опубликованной в сентябрьском номере, с. 519: “возможность души образовывать целые числа бесконечным добавлением единицы к самой себе”), мы видим, что эти авторы используют данный термин как собственное имя, тогда как мсье *Ballue* использует общий термин, предполагая существование нескольких единиц. В то же время мы видим, что слова “*совокупность*” и “*добавление*”, используемые мсье *Ballue*, требуют объяснения. Мсье *Le Roy* и мсье *Vincent* употребляют глагол “*добавлять*”, что, видимо, является действием, имеющим место в человеческой душе. Но трудно увидеть, каким образом вещь может быть добавлена к самой себе. Какого рода отношения задают эти совокупности? Являются ли они физическими, историческими, геометрическими или психологическими? Или же они чисто логические?

Читатели, вероятно, будут разочарованы, поскольку я лишь высказал возражения и поставил проблемы. Но поскольку позитивные решения уже были выдвинуты в моих работах<sup>2</sup>, здесь я могу ограничиться демонстрацией того, что в этой теме затрагиваются крайне трудные вопросы и что предмет гораздо сложнее, чем кажется на первый взгляд.

---

<sup>2</sup> См.: *Frege G. Die Grundlagen der Arithmetik.* – Breslau: Wilhelm K ьbner, 1884; *Id. Grundgesetze der Arithmetik I.* – Jena: Hermann Pohle, 1893.