Из архивов

ФРЕГЕ: ПОСЛЕДНИЙ ЛОГИЦИСТ*

П. Бенацерраф

Первая версия этой статьи была подготовлена и представлена в Чапел Хилл на коллоквиуме в Университете Северной Каролины в октябре 1976 г. Она также послужила основой для двух семинаров, проведенных мною в Университете Миннесоты в Морисе в феврале 1980 г. Я особенно признателен Стиву Вангеру, Фабрицио Мондадори, Глену Кесслеру, Яну Хакингу, Давиду Каплану, Джиму Вэну Эйкену и Хайди Ишигуро за их полезные замечания к первоначальному наброску. Окончательная версия статьи была завершена, когда я был стипендиатом Центра специальных исследований в науках о поведении. Выражаю признательность за поддержку этому Центру, Фонду Слоана, Национальному фонду гуманитарных наук и Принстонскому университету.

В молодости меня научили нескольким фундаментальным истинам: Фреге был отцом логицизма, поскольку он продемонстрировал, что арифметика на самом деле есть только (искусно замаскированная) логика, и, следовательно, в действительности она является аналитической и поэтому априорной. И все это показывает, где относительно арифметики, а также, вероятно, и относительно всего остального так называемого синтетического a priori ошибался Кант.

---

* Перевод с английского В.А.Суровцева по изданию: *Benacerraf P.* Frege: The last logicist // Midwest Studies In Philosophy. – VI. – Minneapolis, MN, 1981. – P. 17–35. Выполнен при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант № 03-03-00363а) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-06-80359).

Мне говорили также, что Фреге изобрел ту логику, каковой и была на самом деле арифметика (или, самое меньшее, что он был отцом современной логики). Я не задумывался (возможно, мне не приходило в голову задаться таким вопросом) над этим слишком уж счастливым совпадением открытия и изобретения. Необходимо учесть по меньшей мере десятилетний интервал, пролегающий между открытием (изобретением) законов логики и дальнейшим открытием того, что они как раз и являются тем, относительно чего нужно показать, что базовые законы арифметики на самом деле с самого начала суть базовые законы логики.

Здесь у нас возникает целый клубок проблем, а именно:

- касающихся того, что, работая, думал сам Фреге;
- касающихся того, что мы взяли из того, что он сделал как для логики, так и для арифметики;
- касающихся в более общих чертах надлежащей оценки философской важности этих достижений.

Данная статья затрагивает некоторые из этих тем. Мой непосредственный интерес заключается в том, чтобы исследовать роль логицистской доктрины в эмпирицизме XX в. с целью проверить, были ли взгляды позитивистов усвоенными (или приспособленными) взглядами Фреге. Я надеюсь, что мои соображения послужат основой для более полного понимания взглядов самого Фреге и в конечном счете исходным пунктом для обсуждения увлекательных философских тем. Для начала я должен вернуться к фундаментальным истинам, которым меня научили в молодости. Они связаны с содержанием и философской важностью тезиса логицизма.

Логицизм

Логицизм, как я его усвоил, был философской точкой зрения, близкородственной эмпирицизму. Последний был провозглашен Карнапом, Гемпелем, членами Венского кружка, Айером и др. как ответ на учение Канта о том, что пропозиции арифметики суть априорно синтетические. Фокусируясь на предложениях, выражающих математические пропозиции, логицисты допускают, что они являются априорными, т.е. их можно знать независимо от опыта (кроме, конечно, того, что в опыте может возникнуть потребность их сформулировать). Но, отвечая Канту, логицисты утверждают, что эти пропозиции являются априорными, потому что они аналитические, т.е. потому что они истинные (или ложные) просто «в силу» значений терминов, из которых они сформированы. Таким образом, знать значения этих терминов – значит знать все, что необходимо для знания их истинности. Эмпирического исследования не требуется. Философская цель продвижения этого взгляда была открыто эпистемологической, ибо логицизм, если бы он был подтвержден, показал бы, что наше знание математики может быть объяснено знанием языка, каким бы ни было объяснение. И конечно, предполагалось, что знание языка *само* могло быть объяснено способами, совместимыми с эмпирицистскими принципами, которыми вполне можно *изучить* сам язык[1]. Таким образом, все наше знание, если следовать Юму, однажды можно было бы увидеть либо как затрагивающее «соотношение идей» (т.е. аналитическое и априорное), либо как затрагивающее «факты» (т.е. синтетическое и апостериорное). Сомнение Канта в этой дихотомии было бы устранено демонстрацией того, что его наиболее сомнительный контрпример – математика, хотя по общему признанию и являющаяся априорной, была ошибочно классифицирована им как синтетическая.

Логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая из которых обладает своими особенностями, но большинство из этих версий имеют следующую общую структуру:

1) истины арифметики *переводимы* в истины логики;

2) (1) демонстрируется тем, что (a) устанавливаются определения для «внелогического» словаря (понятий) арифметики в «сугубо логических» терминах и (b) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметически ложные утверждения – в логически ложные;

3) относительно этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что (*a*) поскольку определения, по предположению, сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы, и (*b*) сами логические истины мыслятся истинными в силу значения, в данном случае – в силу значений встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими).

[1] Современные дискуссии, посвященные основаниям лингвистической теории, показали, что, даже принимая лингвистическую природу математических истин, эмпирицисты находятся на некотором расстоянии от цели. Я думаю, эти аргументы проблематичны, но само их существование показывает, что предмет отнюдь не кристально ясен. Здесь я имею в виду работы Ноама Хомского.

Как бы там ни было, именно эта живучая точка зрения много раз обсуждалась. Я сам некоторое время назад был вовлечен в эту дискуссию[2] в той ее части, которая может быть проинтерпретирована как доказательство того, что либо определения математических терминов не сохраняют их значений, либо их значения не предопределяют их референты, поскольку различные и равным образом адекватные определения приписывают различные референты математическому словарю. Позднее я покажу, что Фреге и я говорим здесь в унисон (хотя прежде я и считал, что он придерживался противоположной точки зрения). Определения, адекватные *его* целям, не сохраняют референта. Но подробнее об этом позднее. В данный момент я хочу прежде всего очертить позицию логицистов с целью сравнить ее с позицией самого Фреге.

Относительно мало было написано о том, является ли аналитичной сама логика, поэтому слово может здесь быть просто для того, чтобы локализовать вопрос и некоторые возможные на него ответы в спектре рассматриваемых позиций.

Если, как поступил У.В.Куайн[3], определить аналитическую истину как преобразуемость в логическую истину посредством сохраняющих значение определений, тогда то, что законы логики являются аналитическими, становится тривиальным. Но применительно к логике такое определение мало в явном виде относится к традиционной трактовке аналитичности как истины-в-силу-значений. Однако *это* последнее объяснение взяло на себя труд убедить нас в том, что аналитические пропозиции также являются априорными. В пользу определения Куайна следует также упомянуть, что оно отчетливо восходит к Фреге, а через него к Канту. Ибо трактовка аналитичности у Фреге, которую мы находим в начале его работы «Grundlagen der Arithmetik» («Основоположения арифметики»), заключается в следующем: «Это зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной…» (с. 27)[4]. Таким образом,

---

[2] См.: *Benacerraf P.* What numbers could not be // Philosophical Review. – 1965. – V. 74, No. 1. – P. 47–73.

[3] См.: *Quine W.V.* Two dogmas of empiricism // Philosophy of Mathematics / Ed. by P.Benacerraf and H.Putnam . – Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[4] См.: *Frege G.* Grundlagen der Arithmetik. – Breslau, 1884. П.Бенацерраф цитирует английский перевод этой работы, выполненный Дж. Остином: *Frege G*. The foundations of arithmetic. – Evanston, Ill., 1968. В настоящей публикации здесь и далее цитаты даются

пропозиция является аналитической, если при ее доказательстве используются только общие логические законы и определения.

Ниже мы рассмотрим данное определение в деталях. Здесь же следует отметить такой момент: «доказательства», выводимые из общих законов и определений, *достаточны* для аналитичности. Разумеется, это не делает описание, представленное Фреге, эквивалентным описанию, предлагаемому (но не отстаиваемому) Куайном, поскольку Куайн и Фреге расходятся в том, чем должна быть логика, и, вероятно, в том, какова роль определений. Для Куайна логика есть теория первого порядка с квантификацией плюс равенство, для Фреге же она значительно шире. Поскольку более узкая версия логики у Куайна недостаточна для «доказательства» законов арифметики, математика *не* является аналитической в интерпретации Куайна, хотя она все еще может оставаться таковой в интерпретации Фреге. Я говорю «может быть», поскольку, когда логика Фреге впала в противоречие (и, вероятно, тем самым перестала также быть логикой), его точка зрения осталась в некоторой неопределенности. Окажется ли математика аналитической в смысле, который вкладывает в это понятие Фреге, должно зависеть по крайней мере от того, какую логику подставляют вместо неудачной версии Фреге.

Связь с Кантом устанавливается самим Фреге, когда он уподобляет свой собственный подход подходу Канта, но упрекает последнего за узость его концепции (см. «Основоположения арифметики, § 88). Фреге критикует Канта за то, что тот дает определение, которое применимо только к универсальным общим пропозициям – пропозициям, которые могут быть истолкованы как имеющие субъектно-предикатную форму, – и за слишком узкую концепцию определения, которая, вероятно, приспособлена для использования при демонстрации того, что понятие субъекта пропозиции содержит понятие предиката.

Поэтому Фреге, предлагая объяснение аналитичности, замыслил улучшить Канта в двух аспектах. Во-первых, объяснение Фреге классифицировало *все* пропозиции как аналитические или синтетические, т.е. оно, по предположению, являлось исчерпывающим, и, во-вторых, его объяснение расширяло концепцию определения за пределы кантовского понятия (которое Фреге характеризует как определение «посредством

по русскому переводу: *Фреге Г.* Основоположения арифметики. – Томск: Водолей, 2000. Номера страниц также приводятся по этому русскому изданию. – *Прим. перев.*

заданных признаков» – см. «Основоположения арифметики, с. 109) до понятия, охватывающего «действительно продуктивные определения в математике» (Там же, с. 110)[5].

Я хочу подчеркнуть эпистемологическую мотивацию логициста XX в. Это, конечно, проявляется в третьей составляющей его точки зрения – там, где такой логицист пытается пожинать богатый философский урожай, выросший из семян, посеянных Фреге. Поразительный пример являет собой позиция, выраженная К.Г.Гемпелем в статье[6], которая, хотя в действительности и не задает нового основания, представила ядро этих взглядов настолько, насколько удалось ее автору. Согласно Гемпелю, фреге-расселовское определение числа, нуля, наследника и связанных с ними понятий показало, что пропозиции арифметики являются аналитическими, поскольку они вытекают, будучи обусловленными определениями, отталкивающимися от логических принципов. Ясно, что Гемпель подразумевает здесь то, что при объяснении формальной системы логики (теории множеств или второпорядковой логики плюс аксиома бесконечности) можно посредством оговоренных определений вести выражения «число», «ноль», «наследник» таким способом, что предложения такой формальной системы, использующие эти введенные сокращения и формально являющиеся теми же самыми (т.е. они толкуются тем же самым способом), что и определенные предложения арифметики (например, «ноль есть число») оказываются теоремами системы. На основании этого неоспоримого факта Гемпель заключает, что такие определения показывают, что теоремы арифметики являются лишь относящимся к способу записи расширениями теорем логики и, следовательно, они являются аналитическими.

Между тем у Гемпеля нет полномочий делать такое заключение. У него не было бы подобных полномочий, *даже если бы* теоремы логики

[5] Я не могу удержаться от того, чтобы не отметить в защиту Канта, что при условии кантовского понятия аналитичности его концепция определения превосходна. Только когда вы расширяете данное понятие aŕ la Фреге, это определение «посредством заданных признаков» становится слишком суженным, в частности если вы определяете функции так же, как предикаты. Поэтому аргументация Фреге в конце § 88, сводящаяся к тому, что Кант ошибочно рассматривал как синтетические определенные заключения, выведенные из его (Фреге) новой разновидности определения с помощью чисто логических средств, содержит со стороны Фреге petitio principii, ибо только на основании фрегевского понятия аналитичности они оказываются аналитическими безотносительно разновидности определения, используемой в доказательстве.

[6] См.: *Hempel G.G.* On the nature of matehematical truth // Philosophy of Mathematics.

в их изначальной записи сами были аналитическими. Ибо единственное, относительно чего можно показать, что оно следует из теорем логики *посредством соглашения*, – это сокращенные теоремы логистической системы. Чтобы выгодно использовать это в аргументе относительно *пропозиций арифметики*, нужен аргумент, что предложения арифметики в их доаналитическом смысле *подразумевают то же самое (или приблизительно то же самое), что и их синонимы в логистической системе*. Это требует особой и более широкой аргументации. Я предлагаю это к обсуждению не для того, чтобы скомпрометировать Гемпеля, но для того, чтобы использовать его взгляды как иллюстрацию эпистемологической мотивации, которая подначивает логицистов XX в. *Суть* логицизма должна сделать осмысленным то, как мы можем обладать априорным знанием математики. Посредством соглашения – так считает Гемпель. Если бы это хоть в какой-то степени было правильным, все сводилось бы к проблеме аналитичности логики – к проблеме, которую я здесь не пытаюсь решить, хотя и буду указывать некоторые очевидные способы, в которых определенные ответы влияют на надлежащую оценку философской позиции логицистов.

Вопрос становится особенно запутанным, когда в контексте защиты такой логицистской позиции, в свою очередь, обсуждается аналитичность логики, ибо эта логика должна включать в себя достаточное количество материала из теории множеств (или подходящего эквивалента), чтобы охватить достаточное количество математики. Единственное решение, которое, по-видимому, предлагается в этом случае, состоит в том, что аксиомы конституируют имплицитные определения понятий. Это форма конвенционализма, истолковывающая аксиомы как соглашения, которые должны управлять использованием содержащихся в них терминов: *используй/понимай этот язык так, чтобы его предложения оказались истинными*! Достаточно трудно понять, когда интерпретация «логического словаря» фиксирована, ибо в качестве инструкции, применимой ко всему языку, она вообще не имеет смысла, а в качестве объяснения того, как предложения логики *фактически* получают свои истинностные значения, она бесполезна, что в значительной мере прояснили Куайн[7] и др. Логика не нуждается в *применении* такого правила к индивидуальным случаям. Конечно, *фактически* может иметь место случай, когда мы используем язык таким способом, что рассматриваемые предложения

[7] См.: *Hempel G.G.* Truth by Convention // Philosophy of Mathematics.

оказываются истинными. Но мы ищем такое *объяснение* этого факта, которое в то же самое время делало бы истинностные значения этих предложений известными *a priori*. Ибо это и есть цель, которую поставили себе логицисты двадцатого века.

До сих пор я концентрировал свое внимание на истолковании комплекса философских взглядов, принятых в философской установке, отвечающей на кантовский вызов эмпирицизму, которым и был логицизм этого столетия. Я могу показаться крайне эксцентричным, поскольку, обсуждая логицизм XX в., не упомянул наиболее известного его представителя, а именно, Рассела-Уайтхеда. Я не стал упоминать его по двум причинам: во-первых, потому, что в кратком обзоре невозможно охватить его изворотливые и меняющиеся установки; во-вторых, потому, что, вероятно, по этой самой причине то, что я условно называю «логицизмом», в большей степени питалось его техническими достижениями (и достижениями Фреге), чем его неустойчивыми философскими представлениями об этих достижениях. (В скобках могу добавить, что сказанного даже много для того, чтобы уже определить несостоятельность различия между его «техническими достижениями» и его «философскими взглядами», как хорошо известно любому, кто пытался постичь смысл понятия пропозициональной функции, изложенного в «Principia Mathematica».)

Далее, общепризнанный взгляд таков: вызов Канта был встречен. На самом деле математика является аналитической, а не синтетической. Это было продемонстрировано Фреге, когда он показал, каким образом математические пропозиции имеют одинаковое значение с логическими пропозициями, которые сами являются аналитическими (и, следовательно, известными *a priori*). Фреге показал это, анализируя «внелогический» словарь арифметики и строя определения, которые сохраняют значение (и, следовательно, референцию и истинность). Фреге, стало быть, был первым логицистом.

Фреге

Если Фреге был первым логицистом, то он же был и последним. Если уместно провозгласить, что Фреге действительно верил в «логицизм» и что он был первым, кто верил в него, то наиболее вероятно, что он был также и последним. Насколько я знаю, никто со времен Фреге (и уж точно не «логицисты» XX в.) не придерживался в точности той позиции, которую защищал Фреге в «Основоположениях арифметики» и которая сподвигла его написать этот философский шедевр. Несмотря на то что взгляды, представленные в общем виде в предыдущем разделе, широко поддерживались (я думаю, что большинство философов, рассматривавших данную тему, близки к «логицизму» в этом смысле), они не были фрегевскими. Имеются различные точки соприкосновения, которые позволяют считать, что Фреге придерживался такой позиции, но я буду отстаивать, что это не так, – его точка зрения была много более интригующей и в его духе прямо антитетической философской мотивации его «последователей» в XX в.[8]

Прежде всего, Фреге, конечно, не был эмпирицистом. По-видимому, одной из философских целей «Основоположений арифметики» было доказать несостоятельность доктрины Канта, провозглашающей что арифметика состоит из синтетических априорных пропозиций. Но Фреге охотно допускает то, чего не допускают эмпирицисты, – что геометрия Евклида является априорно синтетической. Он утверждает: «Называя геометрические истины синтетическими и априорными, он [Кант] раскрыл их подлинную сущность. И даже сейчас это заслуживает повторения, поскольку зачастую все еще признается. Если Кант и заблуждался относительно арифметики, то для его заслуг, я думаю, это несущественный ущерб. Дело в том, что существуют синтетические суждения a priori; а встречаются ли они только в геометрии или также и в арифметике, менее значимо («Основоположения арифметики», с. 111).

Поэтому для Фреге установление аналитичности арифметических суждений не является способом защиты эмпирицизма против атаки со стороны Канта. Это установление имеет другую цель, которую я надеюсь раскрыть, исследуя то, как Фреге формулирует и защищает свои взгляды. Фреге начинает «Основоположения арифметики» с сожалением о том факте, что никто, по-видимому, не дал удовлетво-

---

[8] Взгляд, который я назвал «логицизмом», очевидно, представляет собой сочетание двух точек зрения: семантического тезиса в том смысле, что *арифметика является дефиницонным расширением логики*, и эпистемологического утверждения о том, *как это объясняет априорный характер арифметики*. Очевидно, можно (и, вероятно, следует) сохранить это название только для семантического тезиса, и в этом случае Фреге определенно был бы логицистом в той же степени, что и его последователи (хотя здесь также многое зависит от того, как интерпретировать «дефиниционные расширения», – это коварный вопрос, который я в деталях поставлю в конце этой статьи). Я избрал настоящий метод отчасти для драматического эффекта, а отчасти потому, что на самом деле я не уверен в том, насколько отчетливо оба тезиса могут быть отделены один от другого, т.е. насколько философская мотивация за рамками заданной формы семантического тезиса «заражает» сам тезис.

рительного ответа на вопрос, что такое число один: «Не постыдно ли науке так и пребывать в неясности о ее первейшем и, по-видимому, таком простом предмете? Еще менее можно сказать, что такое число. *Когда понятие, которое лежит в основании обширной науки, преподносит затруднения, неотложная цель, пожалуй, все-таки состоит в его более тщательном исследовании и преодолении этих затруднений* (Там же, с. 17; курсив мой. – *П.Б.*).

Это подготавливает почву. Основания арифметики нуждаются в исследовании с точки зрения преодоления «затруднений», к которым приводят фрегевские фундаментальные понятия. Есть попытки трактовать приведенное Фреге высказывание как ироническое, – будто бы на самом деле он не считал нашу неспособность дать удовлетворительное объяснение понятию числа подлинным затруднением в рамках этой науки. Конечно, это забота философии (уместная в философии), но не затруднение, являющееся *внутренним для науки о самом числе*. Но такая интерпретация была бы ошибочной. Фреге подчеркивает, что это предмет, с которым сами математики должны иметь дело как математики, даже если исследование будет по необходимости содержать существенно философский компонент: «Благодаря этому мои пояснения, пожалуй, станут более философскими, чем может показаться уместным многим математикам; но основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски. Для философии и математики эта задача является общей» (Там же, с. 19).

Принуждаемый тем, что доказательство является неполным, если определения до конца не оправданны, Фреге заявляет: «Но, пожалуй, следует принять во внимание, что строгость доказательства остается видимостью… если определения только задним числом оправдываются тем, что не столкнулись с противоречием. В сущности, так всегда достигают только уверенности, основанной на опыте, и должны, собственно, быть готовы, в конце концов, все же встретить противоречие, которое приводит все здание к обвалу. Поэтому, я полагаю, к общим логическим основаниям нужно обратиться в несколько большей степени, чем считает необходимым большинство математиков» (Там же, с. 23). Здесь нам следовало бы поймать Фреге на слове. Сказанное им связано с основаниями арифметики, которые мотивируют его исследование. Это неудивительно, если учесть название исследования.

Однако такое отношение может быть интерпретировано двумя различными способами, соответствующими интересам философа и интересам математика. Философы, как правило, воспринимают остов знания как заданный и при объяснении этого остова знания имеют дело с эпистемологическими и метафизическими вопросами, примеряя его к общему объяснению знания и мира. В этом заключается установка Канта. Он изучает природу математического знания в контексте исследования знания в целом. И это же было позитивистской установкой, хотя позитивисты приходят к совершенно иным выводам.

Между тем математика в том, что может быть названо «основаниями», интересует совсем другое. Будучи *математиком*, он связан с существенными вопросами относительно истины рассматриваемых пропозиций, тогда как несколько более «философские» вопросы касаются того, как такие пропозиции, собственно, установлены. Интересы математиков и философов не разъединены, – эти вопросы нельзя строго разделить. Но различия являются значимыми, и важно держать их в уме, поскольку мы подходим к Фреге. Я утверждаю, что Фреге времен «Основоположений арифметики» имеет мотивацию математика, что там, где, как кажется, он непосредственно рассматривает более типичные «философские» вопросы (являются ли пропозиции арифметики аналитическими или синтетическими, априорными или апостериорными), *он уточнил эти вопросы и выразил их в такой форме, что ответы, которые они требуют, будут ответами на существенные математические вопросы, составляющие его принципиальный интерес.* Таким образом, если логицизм является комплексом философских взглядов, описанных мною в первой части этой статьи, то Фреге не был логицистом.

Поэтому, с точки зрения Фреге, если мы не делаем так, как он настаивает, то мы «должны, собственно, быть готовы, в конце концов, все же встретить противоречие, которое приводит все здание к обвалу»[9]. Что же нужно сделать? Совершенно очевидно следующее. Пропозиции арифметики нуждаются в *доказательстве*. Мы не можем просто принимать их за само собой разумеющееся согласно интуиции или потому, что они продемонстрировали свою полезность во многих применениях. «В математике недостаточна лишь моральная уверенность, поддержанная многими успешными применениями» (Там же, с. 25). Эта ситуация вполне аналогична той, когда бы в некоторых более продвинутых областях

[9] Конечно, самая горькая ирония заключается в том, что Фреге должен был встретиться с такой возможностью, когда его система привела к противоречиям, и что он не встретился бы с ней, если бы не продолжал свои основополагающие исследования.

математики остов «знания» возрастал, но никогда не был адекватно обоснован. «Но к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее» (Там же).

В § 1 Фреге объясняет *общую* потребность в строгости и доказательстве в математике. В § 2 он защищает свой поиск доказательства таких пропозиций, как 7 + 5 = 12 или закона ассоциативности сложения, ссылаясь на последнее из процитированных мною замечаний и уподобляя этот поиск случаю, когда «Евклид доказывает многое из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый» (Там же). Затем Фреге переходит к тому, что я считаю ядром его точки зрения, – цель доказательства он объясняет следующим образом: «К таким исследованиям меня также побуждают философские мотивы. Вопросы об априорной или апостериорной, синтетической или аналитической природе арифметических истин ждут здесь своего ответа. Ибо, даже если сами эти понятия и принадлежат к философии, я все же думаю, что решение не может воспоследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов» (Там же, с. 26; курсив мой. – *П.Б.*).

Что касается выделенного мною «также», то мотивы, обсуждаемые до сих пор, были математическими, а не философскими. Только теперь Фреге обращается к тому, что, как он чувствует, может рассматриваться в качестве философского аспекта его работы. И он заявляет, что будет так истолковывать «философские» вопросы об априорном и аналитическом характере арифметических истин, что они будут иметь математические ответы. Вне сомнения, это окажется несколько спорным в той мере, в которой переопределение Фреге этих понятий являются простыми прояснениями, и в той мере, в какой они являются важными переинтерпретациями. Это будет зависеть от того, что мы принимаем за намерения Канта и Лейбница. Но мое внимание в большей степени притягивает контраст между этими понятиями в том виде, как они определены у Фреге, и соответствующими понятиями, вплетенными в ткань философских взглядов, которые я назвал «логицизмом» и которые очертил в предыдущем разделе этой статьи.

Лучший способ найти эти ответы заключается в том, чтобы следовать § 3, абзац за абзацем, добавляя, комментируя текст там, где это покажется уместным. Параграф короткий, но излагаемые в нем мысли очень содержательны. «Нередко случается так, – пишет Фреге, – что сперва получают содержание предложения, и затем проводят его строгое доказательство другим, более трудным способом, посредством которого часто условия пригодности могут быть также изучены более точно. Таким образом, вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения, в общем, нужно отделять от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение» (Там же, с. 26). Это на поверхностный взгляд невинное различие, указывающее на то, что мы часто образуем пропозиции в своем сознании (а на самом деле приходим к вере в них) и только позднее (а возможно, никогда) получаем доказательства этих пропозиций (или их соответствующих уточненных версий). Суть этого замечания состоит в том, чтобы попытаться отделить понятие содержания суждения от понятия обоснованности этого суждения – в смысле обоснования, как оно было сформулировано в предыдущих разделах книги Фреге, т.е. «поддержки» суждения пропозициями, от которых оно «зависит» в своей истинности. Попытка Фреге развести эти две идеи (содержание и обоснование) станет ключевым моментом в его критике Канта, важнейшим аспектом его переопределения аналитичности и центральным пунктом расхождения с позднейшими «логицистами».

Мы должны осознать разделение содержания и обоснования как первый этап атаки на Канта. Причина этого прозрачна. Для Канта различие между аналитическими и синтетическими пропозициями было различием прежде всего в *содержании* пропозиций. Эпистемологическая суть заключалась в том, что для аналитических пропозиций это различие в содержании имело непосредственное следствие: они априорны, они познаваемы независимо от опыта именно на основании рассмотрения их *содержания*. Ибо факт относительно содержания аналитических пропозиций состоял в том, чтобы было возможно заметить, что, просто принимая в расчет такую пропозицию, нельзя не мыслить понятие ее субъекта, не примысливая соответствующим способом понятие ее предиката. Таким образом, главная задача «Критики…» состояла в установлении самой возможности априорно синтетических суждений, поскольку казалось очевидным, почему аналитические суждения априорны. Но продвинутая теория должна быть развита до априорного характера суждений, которые не проходят простой тест, удостоверяющий их аналитичность и, следовательно, очевидную априорность.

«Логицисты» XX в., следуя в этом отношении Канту, предоставили априорный статус расширенному классу аналитических пропозиций *на основе их содержания*, ибо истинность-посредством-значений есть просто расширение кантовского различия и эпистемологического анализа, который ему сопутствует. (Я бы добавил в скобках, что коль скоро класс пропозиций был расширен за пределы субъектно-предикатных пропозиций, которыми Кант ограничил свое внимание, легкий путь к априорности от аналитичности более недоступен.) Если смотреть с этой ревизионистской точки зрения, то Кант ошибался, потому что был введен в заблуждение неадекватным понятием содержания из-за примитивной логической и семантической теории, он не понимал значение того факта, что арифметические пропозиции также истинны по той же самой причине – просто посредством своего содержания.

Таким образом, если смотреть на работу Фреге и его отношение к этой традиции с общепринятых позиций, то от него следовало бы ожидать утверждения как раз такого, которое я приписал «логицистам», а именно, утверждения, что Кант ошибался в своем анализе *содержания* арифметических пропозиций. И действительно, как мы видели выше, Фреге критиковал кантовское различение аналитических и синтетических суждений, поскольку оно не было исчерпывающим («Основоположения арифметики», § 88). Хотя было бы соблазнительным объяснить это как критику кантовского анализа содержания арифметических суждений, объяснение, которое вело бы к тому, чтобы поместить Фреге в рамки эпистемологической традиции, идущей через Канта к современным логицистам, ввергало бы в заблуждение. Ибо в самом начале следующего абзаца Фреге показывает, что он установил свое различение между содержанием и обоснованием, для того чтобы обозначить цель тщательно избегать разговора о содержании. Абзац полон скрытых ссылок на кантовский анализ аналитичности и содержит сноску, в которой Фреге утверждает, что следует Канту. Я процитирую и этот абзац, и сноску (Там же, с. 26–27):

«Эти различения априорного и апостериорного, синтетического и аналитического, по моему мнению*, относятся к пониманию не содержания суждений, но оправдания вынесения суждения… Когда предложение называют апостериорным или аналитическим в моем смысле, судят не о психологических, физиологических и физических обстоятельствах, которые делают возможным образование содержания предложения в сознании, а также не о том, как другой, возможно ошибочно, приходит к тому, что он считает его истинным, но о том, на чем в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное.

* Этим я в действительности не вкладываю новый смысл, но только трактую то, что имели в виду другие авторы, особенно Кант.»

Суть введения различия «содержание/обоснование» заключается в том, чтобы поместить и различие «априорное/апостериорное», и различие «аналитическое/синтетическое» прямо на стороне обоснования, что Фреге и делает в своем выводе, когда явно определяет все четыре понятия в следующем, заключительном, абзаце § 3. Что касается приведенного выше абзаца, то отсылка к Канту скрывается посредством отрицания того, что, называя пропозицию аналитической или априорной, мы каким-либо образом связаны с условиями, которые дают возможность образовать содержание суждения, или, по смыслу, с тем, что фактически происходит, когда суждение образуется в нашем сознании. Это кантианский язык. Он имеет психологистский привкус, от которого Фреге хочет избавиться. В частности, он хочет избежать трактовки аналитичности пропозиций с точки зрения того, что происходит в сознании, когда пропозицию принимают во внимание. Как раз такое рассмотрение должным образом обеспечивает для Канта связь между аналитичностью пропозиции и ее априорным характером. Причины, по которым Фреге стремится избежать такого разговора вообще, и затруднения, к которым, по моему мнению, его в конечном счете привело особое стремление к антипсихологизму, – вопросы сами по себе увлекательные, но предмет данной статьи иной. Я упомянул это только для того, чтобы подчеркнуть контраст, обозначенный Фреге между его собственной позицией и позицией Канта, хотя сказанное в сноске склоняет к обратному.

Итак, резюмируя аргументы, Фреге рассматривает и вопрос об аналитичности суждения, и вопрос о его априорном характере как вопросы, связанные с обоснованием суждения. Соответственно он будет снабжать понятия «аналитическое/синтетическое», «априорное/апостериорное» определениями, которые отражают этот взгляд. Поскольку дело касается арифметических пропозиций, вопрос об их обосновании является собственно предметом математики. Следовательно, эти понятия будут определены так, чтобы сделать собственно математическим вопрос о том, являются ли некоторые арифметические суждения аналитическими или синтетическими, априорными или апостериорными. Это вполне соответствует замечаниям Фреге в конце первого абзаца § 3, которые я ради удобства процитирую здесь снова: «Ибо, даже если сами эти понятия («аналитическое/синтетическое», «априорное/апостериорное». – *П.Б.*) и принадлежат к философии, я все же думаю, что решение не может воспоследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов» (Там же, с. 26).

Смысл, в котором Фреге будет понимать их, будет заключаться в том, чтобы придать некоторое содержание понятию «о том, на чем в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания суждения за истинное», ибо это и есть то метафизическое понятие, от которого зависит его точка зрения. Я говорю «метафизическое», чтобы противопоставить зависимость, на которую намекает Фреге, эпистемической зависимости. Может существовать иерархическая структура наших убеждений с иерархически репрезентированным отношением обоснования или оправдания, которое убеждения человека могут переносить друг на друга, т.е. с отношением зависимости, которое *действительно* встречается и которое может различаться у разных людей, несмотря на то что соответствующие убеждения сами могут быть почти идентичными. Согласно одним взглядам, убеждения образуют подобную структуру, согласно другим, например холистским, – нет. Фреге имеет дело не с таким отношением, а с отношениями зависимости *между самими пропозициями*, при этом неважно, убежден ли в них кто-либо и каким образом эти убеждения соотносятся друг с другом в эпистемическом мире того или иного индивида. Доказательство пропозиции (как минимум) включает в себя ее вывод из пропозиций, от которых она «зависит» в этом метафизическом смысле. Оно включает в себя прослеживание предшествующих ее линий зависимости до пропозиций, которые сами являются «фундаментальными» или «исходными» и *не имеют* доказательств и которые не могут быть сведены к более фундаментальным пропозициям[10].

Теперь я подведу итог § 3, в котором Фреге дает свои определения и тем самым фиксирует смысл вопросов: являются ли пропозиции арифметики синтетическими или аналитическими, априорными или апостериорными? Заключительную часть статьи я посвящу комментарию к следующему абзацу: «Благодаря этому, если речь идет о мате-

[10] Интересно сопоставить установку Фреге на отношение между логическими аксиомами и математическими теоремами с установкой, которая выражена Расселом и Уайтхедом в следующем отрывке, взятом из предисловия ко второму изданию «Principia Mathematica» (Cambridge, 1925. – V. 1. – P. V): «…Главный довод в пользу любой теории относительно оснований математики должен преимущественно индуктивным, т.е. он должен опираться на тот факт, что рассматриваемая теория дает нам возможность вывести обычную математику. В математике наибольшая степень самоочевидности не обнаруживается вполне с самого начала, но она обнаруживается в некоторый более поздний момент. Следовательно, предшествующие выводы, пока они не достигнут этого момента, дают основания скорее для веры в посылки (поскольку из них следуют истинные заключения), нежели для веры в заключения (поскольку они следуют из посылок)».

матической истине, вопрос переводится из области психологии в область математики. Решение его сводится к тому, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причем предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых, возможно, зависит допустимость определения. Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим. Для того чтобы истина была апостериорной, требуется, чтобы ее доказательство не удавалось без ссылки на факты; т.е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определенных предметах. Если, наоборот, возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной» (Там же, с. 27).

Чтобы определить, является ли пропозиция аналитической, ищут ее доказательство, в котором базовые пропозиции суть «исходные истины», т.е. пропозиции, которые сами *не имеют* доказательства. Если такое доказательство существует (доказательство, в котором обращаются только к определениям и «исходным истинам») и привлекаемые исходные истины включают в себя только законы логики, то рассматриваемая пропозиция является аналитической. Если нет – то синтетической. Таким образом, аналитическая пропозиция – это пропозиция, которая может быть доказана только из логических аксиом плюс определения. По крайней мере два аспекта этого определения заслуживают комментария.

Прежде всего, Фреге включает в относящиеся к делу пропозиции, от которых зависит данная пропозиция, «предложения, от которых, возможно, зависит допустимость определения ». Это вытекает из его представления о том, что определения должны не просто вводиться в доказательство, – доказательство неполно, если они также не обоснованы (см. «Основоположения арифметики», с. 22). Вопрос о допустимости определения имеет много аспектов, и было бы затруднительно рассмотреть их все. Фреге обсуждает по крайней мере следующие два: а) приведет ли введение этого определения к противоречию; б) будет ли введение этого определения продуктивным для доказательства, т.е. сможем ли мы, используя его, доказать то, что не могли бы доказать без него (Там же, с. 94).

Включение этого элемента в определение аналитичности сталкивает Фреге с особой проблемой, когда он обсуждает аналитичность законов арифметики. Эта проблема состоит в следующем. Естественно, что отрицательный ответ на первый вопрос (приведет ли введение этого определения к противоречию?) или любой положительный ответ на второй вопрос (будет ли доказательство продуктивным?) потребует доказательства, затрагивающего некоторый вид индукции, вероятно, вплоть до ω, ω^2 или даже ε_0. Если рассматриваемая пропозиция *сама имеет отношение к принципу индукции*, то либо определения не затрагиваются в ее доказательстве и в этом случае она несводима к арифметическим пропозициям и не является аналитической, либо определения затрагиваются и как раз сама индукция является одним из принципов, от которых зависит эта пропозиция, поскольку некоторое обращение к индукции требовалось бы для того, чтобы продемонстрировать допустимость этих определений[11]. К сожалению, Фреге не

[11] Если определения явные, то требование установления существования и единственности определенной сущности, которое Фреге навязывает в «Базовых законах арифметики («The basic lqws of arithmetic»), было бы достаточным для того, чтобы гарантировать, что система, включающая в себя определение, является консервативным расширением первоначальной системы, и, следовательно, она непротиворечива, если была непротиворечивой до введения определений. Поэтому вопрос о том, является ли данный закон аналитическим, в лучшем случае зависит от того, являются ли законы, требуемые при доказательстве существования и единственности каждой определенной сущности, используемой в его доказательстве, законами логики. Я говорю «в лучшем случае» по двум причинам. Во-первых, определения, которые не являются явными, но, возможно, являются контекстуальными, могут трактоваться как новые аксиомы, обоснованность которых требует по крайней мере соответствующего аппарата, позволяющего доказать непротиворечивость расширенной системы. Во-вторых, даже в простом случае эксплицитные определения, несмотря на то что существование и единственность достаточны для того, чтобы гарантировать относительную непротиворечивость, я не уверен, что выдвинутое Фреге требование, чтобы определения были полностью обоснованы, не навязывает другого требования, *чтобы было доказано, что существование и единственность достаточны для того, чтобы гарантировать относительную непротиворечивость*.

Эта путаница существует потому, что, по крайней мере с синтаксической точки зрения, обоснование определений включает в себя доказательство непосредственных комбинаторных теорем – чего-то такого, что, как показал еще Гедель, часто эквивалентно самым трудным арифметическим вопросам или даже труднее. Следовательно, если исходные законы, от которых зависит теорема, включают в себя законы, на которых базируется обоснование определений, то, быть может, было бы лучше, чтобы теорема не являлась аналитической в смысле Фреге. В некотором отношении это несущественная придирка, ибо Фреге может опустить это причиняющее беспокойство условие. Но этот вопрос важен для него. Строгость в математике – один из его наиболее мощных мотивов, и упорствование Фреге в том, чтобы не использовать определения без обеспечения их надлежащим обоснованием, пронизывает всю его работу.

рассматривает этот вопрос и оставляет понятие зависимости недостаточно определенным, чтобы решить эту проблему. Ибо то, являются ли *согласно определению Фреге* арифметические истины действительно аналитическими, должно было бы зависеть от того, достаточен ли «логический» принцип индукции (т.е. принцип индукции в исходной логической записи), для того чтобы установить допустимость определений, введенных в доказательство *математического* принципа индукции. Если он недостаточен, то арифметика *согласно определению Фреге* не является аналитической. Но это самый сложный вопрос, который здесь не может быть изучен более полно. Я упомянул его как интересный и имеющий отношение к делу аспект фрегевского определения аналитичности.

Другой вопрос, который я должен прокомментировать (боюсь, и здесь не будет сделано окончательных выводов), также имеет дело с определениями. Если мы принимаем точку зрения, на которой я настаиваю, что задача «Основоположений арифметики» состоит в том, чтобы доказать вероятность того, что можно найти доказательства прежде не вызывающих сомнений, но не доказанных арифметических пропозиций, и если мы всерьез разделяем мнение Фреге, что поиск таких доказательств есть *математическая* проблема, подобная любой другой, то мы должны также рассматривать определения, которые использовались бы в этих доказательствах, как математические определения, подобные другим математическим определениям. В «Основоположениях арифметики» Фреге не говорит явно, каковы должны быть семантические условия этих определений (многое он говорит в «Базовых законах арифметики»). Здесь не место приводить мои собственные представления о природе математических определений, равно как и реконструировать соответствующие представления Фреге. Но то, что он говорит по этому поводу, несмотря на то что остается неизвестным, как бы он сформулировал эти представления, едва ли позволяет дать определенные истолкования.

Определения являются *не просто* соглашениями о сокращении, ибо, если бы они были таковыми, в требовании продуктивности, процитированном выше, было бы мало смысла. Продуктивность была бы только психологической эвристикой, а не чем-то таким, чему Фреге придавал бы большое значение. Таким образом, даже если формально дефиниенс должен служить по крайней мере «сокращением» для дефиниендума, важность и принципиальная роль определения должны заключаться в чем-то еще кроме этой функции. А именно, в канторовских определениях трансфинитных чисел, которые сам Фреге цитирует и хвалит (с оговорками).

Сходным образом математические определения не отражают, как принято считать, заранее существующую синонимию. Причин этому много. Помимо того, что понятие синонимии имеет неопределенный статус, в определении часто вводится новый термин, и, следовательно, здесь нельзя говорить о заранее существующей синонимии. Но еще существеннее то, что типичные и важные случаи математического определения именно того вида, который подразумевал Фреге, как раз и не подходят для этой модели. Обратимся в одному примеру, который комментирует сам Фреге, рассматривая теорию трансфинитных чисел Кантора. Фреге хвалит эту теорию как расширяющую наше знание, но мягко журит Кантора за апеллирование к «какому-то таинственному «внутреннему созерцанию»» («Основоположения арифметики», с. 108) при развитии теории, «когда нужно стремиться добыть доказательство из определений, что, пожалуй, возможно» (Там же). Далее он добавляет: «Ибо, я думаю, предвидимо, как можно было бы определить эти понятия [следование в последовательности и число]» (Там же). Разумеется, чтобы ни говорил здесь Фреге, он не утверждает, что Кантор проглядел возможность обращения к заранее существующей синонимии, относительно которой Фреге считает, что он может ее предъявить. Анализ этого случая, который близок к случаю с числом, усложнен. Но каким бы ни был корректный ответ, по-видимому, он не будет основываться ни на заранее существующей синонимии, ни на соглашениях о сокращениях.

Если упомянутые мною два случая исчерпывают виды определений, сохраняющих смысл или значение, то остается открытым вопрос, используются ли определения этого вида в «Основоположениях арифметики» и их формальном двойнике «Базовых законах арифметики», если они адекватны и даже сохраняют *референцию*. Сам я в другом месте доказывал, что это не должно быть так[12]. Что думал Фреге? Я хотел бы указать на два пассажа, из которых, по-видимому ясно, что по крайней мере для арифметики Фреге *не* ожидает, что посредством его определений сохраняется *даже референция*. Оба пассажа, которые я имею в виду, связаны с определением числа. Первый – это сноска к определению «числа, соответствующего понятию F» как «объема

[12] См.: *Benacerraf P.* What numbers could not be.

понятия «равночисленно понятию F»» («Основоположения арифметики», с. 92). В сноске, поясняющей слово «объем», читаем следующее:

«Я полагаю, что вместо «объем понятия» можно было бы сказать просто «понятие». Однако возможно двоякое возражение:

1. Это находится в противоречии с моим прежним утверждением, что отдельное число является предметом, на что указывает определенный артикль в выражениях типа «(die) два» и невозможность говорить о единицах, двойках и т.п. во множественном числе, а также благодаря тому, что число составляет только часть предиката указания на число.

2. Могут быть понятия равного объема без того, чтобы совпадать.

Правда, теперь я держусь мнения, что оба эти возражения возможно было бы устранить; но здесь это может далеко увести. Я полагаю известным, что представляет собой объем понятия» (Там же, с. 92–93).

Это могло бы быть достаточно убедительным, если бы не необычность второго возражения Фреге, которое заключается в аргументе, что в случае числовых понятий понятия с идентичными объемами не только не идентичны друг другу, но также не идентичны своим объемам. Это маловероятный ход для Фреге, если учесть его взгляды на различие между понятиями и объектами: понятия не могут быть идентичными чему-либо. Идентичность – это отношение, зарезервированное для объектов.

Второй пассаж содержится в заключении в качестве комментария к тому же самому определению: «Этот способ преодоления затруднения, пожалуй, не всюду найдет одобрение, и многие предпочтут устранять эти сомнения другими способами. Также и я не придаю решающего значения привлечению объемов понятий» (Там же, с. 124).

Можно напомнить, в чем заключалось рассматриваемое «затруднение». Задав *контекстуальное* определение выражения «число, соответствующее понятию F» только для контекстов тождества, в которых обе стороны имеют одну и ту же форму (например, «число, соответствующее понятию F, равно числу, соответствующему понятию G»), Фреге отмечает, что́ для такого определения значит быть логически полным: оно должно фиксировать смысл всех контекстов, содержащих эту фразу. Например, адекватное определение предопределяло бы истинностное значение «число, соответствующее понятию «луны Юпитера», идентично Агамемнону». Однако определения, предусмотренные до этого момента, не предусмотрены для данной цели, и нужны дальнейшие спецификации. Фреге выбирает процитированное мною определение. Таким образом, именно в этом контексте – в контексте, наиболее подверженном критике при установлении того, требовал ли Фреге, чтобы определения сохраняли референцию, – он отступает и допускает, что разные определения, обеспечивающие различные референты (вообще не совпадающие по объему), также могут это делать. Дело обстоит так, как если бы математическая работа, связанная с определениями, уже была сделана, и все, что требуется, – это некое логическое упорядочивание, важное, но не имеющее следствия для математики, и для всего, что имеет значение для математики, нечто можно было бы сделать равным образом хорошо многими различными способами. Отсюда неизбежно следует: не нужно даже сохранять референцию.

Надо сказать кое-что еще. Можно возразить, что во время работы над «Основоположениями арифметики» Фреге не развил понятия смысла и референта в удовлетворительной степени, чтобы насытить вопросы, которые я поставил относительно смысла, и что, таким образом, их не следовало бы ставить. Несмотря на то что в подробностях это выходит за рамки настоящей статьи, в данном случае, я полагаю, те же самые вопросы могут быть поставлены относительно достижений Фреге в «Базовых законах арифметики»[13], написанных существенно позднее. Кратко сформулирую свои доводы.

В «Базовых законах арифметики» Фреге действительно завершает конструкцию, которую он только обещал в «Основоположениях арифметики». Он конструирует систему, формальную в техническом смысле, фундаментальные принципы которой суть то, что он принимает за базовые законы логики и из чего он посредством определений выводит принципы, прежде идентифицируемые им как фундаментальные законы арифметики. В процессе этого построения обнаруживаются некоторые моменты, выбор которых может быть сделан произвольно – произвольно в том смысле, что они не предопределены тем, что происходило ранее, но что, тем не менее, должно быть уже сделано ради полноты. Иллюстрацией будет служить следующий пример.

Фреге вводит то, что он называет «пробегами переменной», чтобы представить объем понятий. Он ставит условием, что две функции имеют один и тот же *пробег переменной*, если они имеют одно и то же значение для каждого аргумента. Если функция – это функция, «значением которой всегда является истинностное значение, вместо «пробег значений

[13] См.: *Frege G.* The basic laws of arithmetic / Transl. and ed. by M.Furth.

функции» можно соответственно сказать «объем понятия», и это, по-видимому, согласуется с тем, чтобы *понятие* прямо называть функцией, значением которой всегда является истинностное значение («The basic laws of arithmetic», p. 36).

Пока все хорошо. Единственное определяющее условие, которое Фреге накладывает на пробег значений, является контекстуальным и состоит в том, что пробег значений двух функций будет равным, если они имеют одно и то же значение для каждого аргумента. Затем Фреге отмечает, что ничего из того, о чем он говорил, не имеет отношения к тому, являются ли два истинностных значения – Истина и Ложь – сами пробегами значений, а если являются, то которое из двух. Он подытоживает эту позицию: «Таким образом, без противоречия… (здесь Фреге повторяет контекстуальное определение. – *П.Б.*) всегда можно поставить условием, что некий произвольный пробег переменной должен быть Истиной, а другой – Ложью» (Ibid., p. 48).

Затем Фреге отбирает частный случай и ставит условием, что этот случай должен быть Истиной, а другой – Ложью. Проблема и ее решение имеют в точности ту же самую форму, что и в случае чисел и объемов понятий. И философские следствия являются теми же самыми. Если мы называем один из отобранных случаев «Джордж», то у высказывания «Джордж = Истина» не было истинностного значения, пока Фреге занимался отбором и пока оно в этом отборе приобретало Истину в качестве своего значения. Но отбери Фреге не случай «Джордж», а какой-то другой, высказывание «Джордж = Истина» было бы ложно. Поскольку «Джордж» затем фигурирует в каждом пробеге значений, он фигурирует в объеме каждого (непустого) понятия. Не будь он удачлив в выборе, объем каждого понятия был бы иным.

Конечно, это не устанавливает какого-либо математического различия. Но то, что это не устанавливает никакого математического различия, имеет важную философскую суть, связанную с тем, что мы должны истолковывать определения так, как это делает Фреге. Я не могу здесь продолжать рассуждения на эту тему, но надеюсь, что эти примеры сделают ясным, что непосредственно «реалистическое» истолкование намерений или достижений Фреге было бы ошибочным для оправдания его практических действий.

Как я и обещал, вывод неудовлетворителен. Представляется очевидным, что определения для Фреге не являются многим из того, относительно чего мы могли бы подумать, что они могут этим быть. Но это оставляет неясным, чем, как он считает, они являются. Соответственно это оставляет неясным или, как минимум, точно не определенным фрегевское понятие аналитичности. Если мы принимаем точку зрения, что Фреге просто требует, чтобы для арифметических пропозиций, которые мы прежде принимали без доказательств, были даны доказательства, то это понятие не хуже самого понятия математического доказательства, ибо трудно сказать, чем являются последние, но математики продуцируют и осмысливают их ежедневно. Конечно, это недостаточно хорошо для Фреге, который хотел вывести понятие математического доказательства из области интуиции и свести его к небольшому числу установленных формальных правил логики. Из его рассуждений мы усвоили, что он не сможет успешно достичь данной цели, пока не сделает то же самое для своего понятия определения.

Наконец, я подхожу к фрегевскому понятию *a priori*: «Если возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной» («Основоположения арифметики», с. 27). Во-первых, для других авторов понятие *a priori* имело определенную прямую связь с познанием. Для Фреге это не так, поскольку ничего в приведенном выше определении не содержит указания на то, что какие-то априорные пропозиции вообще познаваемы, если не считать ссылку на факт, что предельные истины, из которых могут быть доказаны априорные пропозиции, сами не нуждаются в доказательстве. Но это скорее бессодержательно, поскольку нигде в «Основоположениях арифметики» Фреге не предлагает объяснения того, что означает потребность в доказательстве. Он говорит о том, что делают арифметические пропозиции, а не об основаниях (и это, видимо, принципиально для его убеждения), по которым они *восприимчивы* к доказательству.

Во-вторых, мне хотелось бы заметить, что идея пропозиций, не допускающих доказательства, производна от приписанной мною Фреге рационалистской концепции иерархии пропозиций, часть из которых являются абсолютно базовыми и образуют основание, на котором покоятся все «другие». Фреге и в дальнейшем отдает предпочтение этой концепции, когда соглашается с данной Ханкелем критикой доктрины Канта, гласящей, что числовые равенства конституируют бесконечное множество недоказуемых и самоочевидных пропозиций. Читатель, наверное, вспомнит, что Ханкель критиковал Канта за предположение, что числовые равенства все самоочевидны и все же недоказуемы. Ханкель, считает

Фреге, правомерно называет предположение о бесконечной множественности недоказуемых первичных истин неуместным и парадоксальным, и оно действительно противоречит потребности разума в наглядности первых основоположений.

Должно быть только конечное (или легкоконтролируемое) число первых принципов, из которых могут быть выведены все другие априорные истины. Их обозримость есть предмет, которому Фреге не уделяет дальнейшего внимания, поскольку, на мой взгляд, это требовало бы от него дать объяснение тому, как мы можем знать и действительно знаем то, что мы знаем, – объяснение, которое принуждало бы его к обсуждению условий, при которых наши убеждения конституируют знание, т.е. к теме, которая, как Фреге правильно осознает, предполагала бы определенные психологические исследования, но которую он (и, я думаю, ошибочно) выметает своей антипсихологистской метлой. Однако, как я говорил выше, это тема другой статьи.

Я закончу свой анализ § 3 забавным, выбивающимся из общего подхода вопросом: все ли аналитические истины, согласно определениям Фреге, являются априорными? Предположительно, да, поскольку аналитическая истина, т.е. истина, в доказательстве которой участвуют только первые принципы логики (и определения), и априорная истина, т.е. истина, которая может быть доказана исключительно на основе общих законов, не нуждаются в доказательстве. Очевидно, Фреге полагал, что они являются таковыми par excellence. Но как раз ясно следующее: Фреге считал, что он показал, что все арифметические истины являются аналитическими. Это порождает проблему, ибо влечет за собой то, что есть множество логических первых принципов, из которых могут быть выведены все арифметические истины при использовании только определений и принципов логического вывода. Характеристики, которые Фреге дал природе логического доказательства, делают ясным, что подразумеваемое им понятие доказательства является «эффективным» в техническом смысле. Таким образом, если все арифметические истины суть аналитические, то имеется множество логических истин, из которых можно эффективно вывести все арифметические истины. Но отсюда следует, что если логика является рекурсивно аксиоматизируемой, то таковой же является и арифметика. А из первой теоремы Геделя о неполноте мы знаем, что арифметика таковой не является. Следовательно, таковой не является и логика, чтобы за логику ни принималось, поскольку считается, что она адекватна для вывода арифметики. Но раз уж логика не является рекурсивно аксиоматизируемой, то ее первые принципы конституируют «бесконечную множественность недоказуемых первичных истин» и, следовательно, она «неуместна и парадоксальна» и, таким образом, «противоречит потребности разума».

Итак, (1) или не все арифметические истины суть аналитические; (2) или не все логические истины априорны (хотя все они тривиально аналитичны); (3) или, вероятно, концепция бесконечной множественности недоказуемых первичных истин вообще неуместна и парадоксальна.

Ни один из указанных выше пунктов недостаточен для установления позиции Фреге, ибо, я думаю, он серьезно относился ко всем трем точкам зрения. На самом деле, на мой взгляд, философская мотивация «Основоположений арифметики» во многом образуется их сочетанием. Я утверждаю, что попытка Фреге установить аналитичность арифметики не должна истолковываться как попытка включиться в продолжающиеся философские дискуссии между Кантом и эмпирицистами и что в действительности само его объяснение вопроса выходит за эти рамки. Скорее это была попытка доказать пропозиции, которые еще должны быть доказаны, относительно которых Фреге был убежден, что они могут быть доказаны, и относительно которых он был убежден, что их следует доказать. Конечно, многие резоны для осуществления этой попытки обеспечивались его общим взглядом на доказательство, на роль логики в доказательстве и на иерархическую структуру всех априорных пропозиций.

Заключение

В этой статье я не касался большинства возбуждающих интерес и важных разделов «Основоположений арифметики», где Фреге реально обсуждает понятия арифметики. Я сконцентрировался прежде всего на том, чтобы попытаться поместить это обсуждение в философский контекст, к которому, как я думаю, оно принадлежит. «Основоположения арифметики» представляют собой в большей степени математический труд, чем это обычно допускается. Или, если говорить обо мне, чем я предпочитал думать. Итак, на мой взгляд, «Основоположения арифметики» не только не являются работой, написанной в кантианско-эмпирицистской традиции, – принимая в качестве ее принципиальной цели опровержение или формулирование дискуссионных философских доктрин, Фреге только по случаю рассматривал эту работу как философскую. При обсуждении «философских» тем он не переопределяет некоторые философские понятия, чтобы вопросы, сформулированные в их рамках, имели математические ответы. Фреге объясняет замысел написания «Основоположений арифметики» как предприятие прежде всего и по преимуществу математическое, в рамках которого исследуются проблемы, центральные для математики. И он рассматривает приводимую в этой работе аргументацию просто как набросок сущностного решения проблемы доказательства в прошлом не доказанных арифметических пропозиций. Успешно дополняя эту цель, он попутно отвечал на то, что, по-видимому, составляет философский вопрос: являются ли истины арифметики аналитическими или синтетическими? Но только впоследствии, перетолковав этот вопрос, Фреге подошел к своим собственным целям. «Основоположения арифметики» содержат только набросок, поскольку здесь Фреге не дает строгих доказательств. Это он оставляет на потом, но это должно быть сделано: «Требование избежать скачка в выведении следствий неопровержимо» («Основоположения арифметики», с. 112).

Философия привнесена как удобное средство для подтверждения того, что арифметические пропозиции должны быть *доказаны*. Поэтому в начале § 4 мы находим вывод, который, как думает Фреге, следует из его соображений, представленных в § 3 и обсуждаемых нами на всем протяжении этой статьи: «Исходя из таких философских вопросов, мы приходим к тем же самым требованиям, которые независимо от этого вырастают в области самой математики: доказать с наибольшей строгостью, если только возможно, основные предложения арифметики…» (Там же, с. 27).