Проблемы логики и методологии науки

АНТИНОМИИ КАНТОРА И РАССЕЛА И ПРОБЛЕМА ЭЛЕМЕНТНОСТИ АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

С.К. Черепанов

Формулировка

Г.Кантор обнаружил свой парадокс в 1899 г. Он исходил из того, что любое множество X должно обладать некоторой мощностью, или количественной характеристикой своего состава. Пусть мощность X обозначена через X^*. Множество $P(X)$ – это традиционное обозначение множества всех подмножеств X. Кантор доказал, что для $\forall X$ имеет место $X^* < P(X)^*$. Пусть множество всех множеств обозначено через $\mathcal{X}$. Очевидно, что если $X = \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}^* < P(\mathcal{X})^*$. С другой стороны, если $\mathcal{X}$ – множество всех множеств, то оно должно обладать максимальной мощностью, т.е. $\mathcal{X}^* \geq P(\mathcal{X})^*$. Возникает противоречие. Можно предположить, что $\mathcal{X}$ в отличие от X не является множеством и не обладает мощностью [1]. Тогда теория множеств должна называться как-то иначе.

Парадокс Рассела (1902 г.) основан на том, что имеет смысл рассматривать множества, являющиеся собственными элементами ($X \in X$), хотя придумать соответствующий пример довольно трудно, и множества, не являющиеся собственными элементами ($X \notin X$). Если рассмотреть множество T всех X, не являющихся собственными элементами, – $\forall X\,(X \in T \equiv X \notin X)$, то при X=T получим противоречие: $T \in T \equiv T \notin T$. В этом случае также предлагается считать, что T не может быть множеством в том же смысле, что и X.

Как видим, решения парадоксов *К* и *Р* строятся на критике канторовского понятия множества, которое допускает весьма широкую трактовку. По-видимому, упреки такого рода справедливы. Однако что-либо конструктивное за ними, как правило, не стоит и дальше констатации очевидных истин эти размышления не идут. Сторонники подобных решений, к примеру, убеждены, что «проблема парадоксов приводит в конечном счете к осознанию неизбежно противоречивого характера всех математических, логических или семантических построений, так или иначе моделирующих всеобщее и воспроизводящих существенную для него самоопределяемость и самоотнесенность… Всеобщее, поскольку оно всеобщее, по природе своей не может обладать какой-либо определенностью, вносимой в него извне, так как в этом случае оно не было бы всеобщим» [2].

Против сказанного трудно что-либо возразить. Только как эти сентенции применить к парадоксам *К* и *Р*? Возможно, следует предположить, что «множества вообще» являются чем-то всеобщим? В таком случае все, что существует, должно рассматриваться как некоторое множество. Соответственно и проблема репрезентации множественности также должна решаться с учетом универсальности множеств. Иначе говоря, содержание понятия «множество» должно быть элементом его объема (в каком языке, в какой знаковой системе оно репрезентируется, уже неважно, так как любая закорючка на бумаге есть некоторое множество, в том числе символы *X* и *T* как термины конкретного множества входят в область определения переменного *X*). Таким путем действительно можно прийти к канторовскому множеству всех множеств. Однако в этом случае сравнительно легко избавиться от «парадоксальности всеобщего» – достаточно ввести какую-либо стратификацию множественности. Но первая же, простая и естественная, стратификация *К* (путем дихотомического деления) открывает дверь парадоксу *Р*: антиномичным оказывается множество тех множеств, которые не являются собственными элементами. А ведь эта множественность не имеет универсального и всеобщего характера! Отсюда заключаем, что рассуждения о «противоречивости вообще» применимы в лучшем случае к *К*, но применительно к *Р* они выглядят схоластическим теоретизированием, скорее запутывающим реальные проблемы, чем помогающим их осмыслению.

К крайностям иного рода относятся попытки ряда исследователей поставить под сомнение саму возможность абстрактной трактовки множества. В частности, С.Лесневский настаивал на неизбежно антиномичном характере таких представлений, равно как и объектов, претендующих на подобный статус.

Определяя абстрактно-общий объект (ОО) как объект, обладающий только (!) теми свойствами, которые являются общими для всех конкретных объектов, соответствующих ему, С.Лесневский приходит к выводу, что ОО должен одновременно обладать и не обладать некоторым свойством. Это, однако, противоречит принципу исключенного третьего, который в «онтологической редакции» гласит, что относительно любого свойства некоторый произвольный объект либо обладает, либо не обладает упомянутым свойством.

Пусть *A* – свойство, общее для некоторых, но не всех обсуждаемых конкретных объектов. Тогда, согласно определению, ОО не может обладать свойством *A*. Это равносильно утверждению, что ОО обладает свойством «не обладать свойством *A*». Однако ОО не может обладать свойством «не обладать свойством *A*», так как это означало бы, что каждый конкретный объект обладает этим свойством, что противоречит исходному условию (свойство *A* не пусто). Таким образом, ОО не может обладать свойством *A* и не может обладать свойством «не обладать свойством *A*». Он – антиномичный [3].

Этот пример лишний раз подтверждает, что проблема парадоксов заключается вовсе не во всеобщности или самоприменимости используемых в них понятий.

Для самого С.Лесневского парадоксальность ОО стала толчком к отказу от теорий абстрактных множеств при разработке номиналистической модели множественности, изложенной в мереологии и онтологии [4]. Разумеется, «крестовый поход» против абстрактности множеств не воспринимается серьезно, особенно в свете общей тенденции к стратификации знания. Полемика С.Лесневского с оппонентами в этом свете выглядит как споры о том, на какую дверь какой ярлычок наклеить, что отражает субъективные пристрастия спорящих и не более того. Заметим еще, что оппоненты С.Лесневского, оправдывающие существование общих объектов, не всегда убедительны в своей аргументации. В частности, ссылки на абстрактность ОО вследствие того, что он не может быть определен как обладающий свойствами конкретных, подпадающих под него объектов, не выглядят убедительными, так как в любой теории фигурируют только абстрактные объекты. Проблема же дифференциации абстрактных сущностей на общие и особенные решается не метафизически, а весьма конкретно, в каждом случае по-своему, с учетом как прагматических целей теории, так и социокультурных традиций.

Приведенные примеры, на наш взгляд, достаточны, для того чтобы понять, что примитивные варианты уточнения канторовского понятия множества весьма проблематичны. Это заставляет более внимательно приглядываться к интуиции «множества вообще», составляющей фундамент канторовской теории множеств, и с осторожностью относиться к многочисленным проектам уточнения его интуитивного содержания. Как заметил С.Клини, «отвергать эти проекты не обязательно, но только их нельзя считать простыми. Они ставят нас перед проблемой перестройки ТМ на совершенно измененной основе, детали которой содержатся в них разве что в виде намека» [5].

Чтобы вообще могла состояться теоретизация множественности, надо иметь теоремы, «справедливые для всех множеств, а все множества, по канторовскому определению, образуют множество. Если это не так, то мы должны указать, каким определением множества мы будем пользоваться взамен, или дополнить канторовское определение некоторым дальнейшим критерием, устанавливающим, когда описанная в его определении совокупность объектов образует множество»[6].

Что такое множество?

Осмысление и прояснение наших интуитивных представлений о множестве – «многом, мыслимом как единое», является достаточно популярным сюжетом в логико-философской и философско-математической литературе. Как правило, исследователями отмечаются ментальный характер множества, его логическая конструируемость. При этом признается, что «сама идея образования множеств отвечает объективным фактам о мире» [7]. Существование как реальных совокупностей материальных предметов, так и их идеальных, ментальных моделей порождает проблему восприятия множественности, которая не имеет однозначного решения. Это создает дополнительные трудности при определении статуса множеств и приводит к взаимоисключающим философским позициям платонизма и номинализма.

Стоит отметить, что собрание предметов лишь тогда можно назвать множеством, когда мы способны отличить элементы этого собрания от чего-то иного. Если элементы, в свою очередь, опять же являются множествами, то придется допустить, что под словом «иное» следует понимать нечто немножественное. Таким образом, «фактор иного» имеет принципиальное значение. Благодаря ему объекты считаются «собранными» и становятся «фактор-единообразными», а «собрание» начинает отличаться от случайного конгломерата, ассоциируемого просто с разнообразием сущего. Отсюда следует важное признание: множество всех множеств не исчерпывает разнообразия сущего и не может претендовать на онтологический статус.

Математическое мышление, разумеется, имеет дело только с абстрактными объектами, и множество – это тоже абстрактный объект, объем которого не исчерпывается перечнем конкретных материальных совокупностей. В этом смысле множество можно понимать как совокупность элементов, идентичность которой определяется ее членами. Между прочим этот факт, по мнению В.В.Целищева, отраженный в аксиоме экстенсиональности множеств, наводит на мысль о том, не является ли данная аксиома попросту частью определения концепции множества. В этом случае, как заметил Д.Булос, возникает искушение назвать аксиому экстенсиональности аналитической [8].

Возможность рассматривать множества как совокупности абстрактных объектов, которые сами являются абстрактными объектами, создает трудности при стратификации абстракций и провоцирует злоупотребление теоретико-множественной терминологией. Вследствие этого в категорию множеств попадают весьма экзотические сущности: пустое множество, т.е. множество, которого нет, множество-вещь, или единичное множество, а также различные версии бесконечных совокупностей.

Вместе с тем не следует забывать, что неопределенность исходной множественной интуиции, допускающей спектр различных вариантов теоретизации, была продиктована самыми благими побуждениями и сыграла важную роль в признании особой роли теории множеств по отношению к математике в целом. Теоретико-множественный подход к математике оказался плодотворным новаторским шагом в развитии этой науки. Он позволил развить особую логическую концепцию целого числа. Г.Фреге и его последователям [9] удалось показать, что базисные математические объекты – целые числа могут рассматриваться как характеристики некоторых совокупностей, так что для логического построения натурального числа нужны только множественные переменные. Это давало теории множеств право претендовать на роль фундамента всей математики.

Соответственно канторовское стремление трактовать множество так широко, как это возможно, сделав его содержание неопределенным, выглядит оправданным и объяснимым. Оно мотивировалось желанием сделать понятие множества самодостаточным, т.е. таким, усвоение которого не требует использования иных понятий (за исключением обиходных, общеупотребительных). В этом случае «множество» обретает категориальный статус, оно становится неопределяемой логической конструкцией, содержательный смысл которой иллюстрируется на примерах.

Подобная ситуация привлекательна еще и тем, что создает возможность включить теоретико-множественные основания математически в русло самой математики, так что отпадает необходимость вводить какие-то дополнительные понятия и процедуры, не принадлежащие к логико-математическому словарю. Эти «благие побуждения» превосходно разглядел Д.Гильберт, выступивший в защиту теории множеств, когда парадоксы потрясали ее основы.

Коварность благих побуждений – факт, не входящий в компетенцию философии математики. Однако достойно удивления, что нежелательные последствия, с которыми в виде парадоксов столкнулась математическая наука, стали общекультурным достоянием.

Между Сциллой и Харибдой

Научиться внятно говорить о «множествах вообще», не прибегая к выяснению природы образующих множество элементов, да еще и сохранив при этом навыки обращения с конкретными совокупностями, равно как и получаемые в этом случае результаты, – задача крайне трудная. Она сродни прохождению между Сциллой и Харибдой. Но именно такая задача стояла перед канторовской теорией множеств. Для ее решения требовалось не просто придать понятию множества статус категории, несводимой к каким-либо иным понятиям (сделать его категориально неопределенным), – необходимо было распространить эту неопределенность на субстрат множественности, сделав несущественным выяснение его элементного состава (онтологическая неопределенность). Однако в этом случае становится непонятным сам принцип собирания элементов в множество со всеми вытекающими отсюда последствиями. Таким образом, категориальная неопределенность множества оборачивается онтологической (субстратной) и логической (операциональной) неопределенностями.

Чтобы избавится от неудобств, доставляемых перечисленными видами неопределенности, проще всего ввести соглашение о том, что элементами множеств должны быть опять же множества, а единственным представителем немножественных форм сущего (коль скоро признается их существование) считать пустое множество $\varnothing$. На основе подобного соглашения, предусматривающего фактическую субстанционализацию множественности как таковой, строится, в частности, система *ZF* и идущие от нее аксиоматики [10].

Проблема элементности абстрактных множеств

Решение парадокса *K*. Упомянутое выше соглашение, предполагающее рассмотрение в качестве элементов множеств опять же каких-то множеств, оборачивается, как известно, парадоксом Кантора. Принципиально важно отметить, что парадокс *K* вовсе не дискредитирует возможность рассматривать абстрактные множества как собственные элементы. Пока не известно, ради чего это делается, бесполезно критиковать или отвергать эту возможность. Скорее следует ее приветствовать, так как в ней находит отражение категориальная самодостаточность понятия множества, вследствие чего теория множеств обоснованно претендует на роль фундамента математики.

Другое дело, если мы пытаемся оперировать абстрактными множествами (в частности, множеством всех множеств) по стандартам обращения с совокупностями конкретных объектов, в природе которых идея «собирания» отнюдь не заложена. Подобные объекты, удерживающие свою качественную специфику, можно группировать в различные совокупности, фиксировать порядковые и количественные свойства соответствующих совокупностей и т.д. Именно для них справедлив тезис *R*, гласящий, что разнообразие систем объектов превосходит разнообразие самих объектов, на котором базируются понятие множества-степени и весь мощностной порядок.

Противоречие, связанное с парадоксом *K*, свидетельствует о том, что опыт обращения с конкретными совокупностями нельзя автоматически переносить на абстрактные множества. Но какие поправки следует внести? Может быть, запретить множеству «путаться» среди своих элементов, так как это препятствует поэлементному сравнению различных множеств (если таковые существуют!) и затрудняет введение мощностных определенностей? Однако само по себе разграничение случаев «элементного» и «множественного» употребления множеств, равно как и запрещение рассматривать множество среди его собственных элементов, ничего не дает. Точнее, дает лишь новый, более сильный вариант парадоксальности – антиномию P. Очевидно, что решение парадокса K надо искать в иной плоскости.

Чтобы получить возможность распространить теорему Кантора о порядке мощностей, справедливую для конкретных совокупностей, на абстрактные множества, будем рассуждать следующим образом. Если природа элементов абстрактных множеств нам неизвестна, то ничто не мешает приписать неопределенному элементному составу абстрактного множества неопределенную количественную характеристику – H. Полагаем, что для $\forall n \in N \;\; H + n = n + H = H$ и $H \bullet 0 = 0 \bullet H = 0$. Спасение теоремы Кантора требует исключения $\varnothing$ из числа элементов множества K, ведь $\varnothing$ – это множество, которого нет [11]. Разумеется, $\varnothing$ может числиться в списке подмножеств любого уже введенного множества, так что $K \subset 2K$. Исключая $\varnothing$ из числа «конституэнт» $У$, мы исключаем возможность отождествления неопределенности «онтологической составляющей» множеств с «пустотой», что неявно допускалось при конструировании множеств методом итерации из «пустоты».

Таким образом, решение парадокса K сводится к констатации банальной истины: множество, даже будучи абстрактной конструкцией, не может мыслиться вне своих элементов. Возможность быть собственным элементом – частный случай этой истины.

Не противоречит ли исключение $\varnothing$ из $У$ интуиции множества всех множеств? Нет, не противоречит. Ведь пустое множество – это не фиксация отсутствия конкретных элементов или конкретного множества. Пустое множество выполняет функцию отрицания произвольного множества, что, очевидно, несовместимо с фиксацией всех множеств. К тому же K не предполагает трактовку отсутствия множества в качестве некоторого, иначе само K будет противоречием, т.е. будет множеством существующе-несуществующих множеств, что равносильно совокупности круглых квадратов.

Решение парадокса *P*. Парадокс P «продолжает» проблематику абстрактной множественности. Его решение дополняет и конкретизирует информацию, извлеченную из решения парадокса K, раскрывая существенные черты свойства «элементности» применительно к абстрактным множествам.

В чем же состоит упомянутая выше «дополнительность»? Она состоит в том, что расселовский парадокс фиксирует фактом своего возникновения новую, отличную от предыдущего случая возможность истолкования онтологической (субстратной) неопределенности множеств. Если предыдущий случай, приведший к антиномии *К*, состоял в допущении возможности полного игнорирования самого понятия «элементности», вследствие чего элементами множеств опять же были некоторые множества, то теперь ситуация меняется: существование проблемы признается. Более того, в *Р* мы имеем дело с попыткой придать свойству «элементности» возможность не только множественной, но и немножественной трактовки, допустив тем самым неоднородность субстрата абстрактной множественности.

Подобная трактовка «элементности» влечет за собой дифференциацию самих множеств. Становится необходимым иметь в виду различные типы множественности. Фактически именно эта ситуация и обыгрывается в *Р*. Таким образом, с одной стороны, недопустимо игнорирование проблем элементности, которое может обернуться возможностью равночисленности элементов и подмножеств, т.е. антиномией *К*. С другой стороны, учет неоднородности «элементной среды» нельзя вести в формах, отрицающих эту неоднородность. Иными словами, различные типы множественности нельзя эксплицировать единым множеством, игнорируя тем самым в акте выражения содержание выражаемого.

Обозначим множество Рассела символом *Т*. Положим $T = \{X_i \mid X_i \notin X_i\}$. Присутствие нижнего индекса i – существенный момент всего подхода! Чтобы выразить ранее озвученную мысль, что *Р* продолжает и дополняет *К* (а не повторяет его), необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $i > 1$. Иначе говоря, необходимо специально акцентировать внимание на том, что обычно проходит мимо сознания исследователей, хотя и присутствует в явном виде в формулировке расселовского парадокса, – на факте существования различных множеств, удовлетворяющих условию «$\notin$ себе». Нет смысла философствовать о природе этого факта, – при любой интерпретации он принадлежит к нашей концептуализированной реальности. Важнее оценить его эвристический потенциал и использовать при разрешении парадокса *Р*.

Итак, мы исходим из того, что совокупностей, удовлетворяющих условию «$\notin$ себе», много, т.е. больше 1. Что в этом особенного? Особенное заключается в том, что в самом признании того, что элементы различных совокупностей нельзя собрать в единое множество, представив его в виде линейной последовательности следующих друг за другом множеств либо просто в виде дискретного набора отдельных совокупностей, ни одна из которых не продолжает другую, присутствует намек на качественную или типовую неопределенность совокупностей. А это значит, что идея абстрактной множественности несводима к образу последовательности (в какой бы то ни было форме, иначе сразу же всплывают парадоксы Бурали – Форти и Ришара – Берри).

Различие составляющих *T* множеств интерпретируется стандартным образом – через использование контрапозиции принципа объемности, или экстенсиональности Э. Иными словами, если члены *T* – различные множества, то в каждом члене *T* есть хотя бы один элемент, которого нет в других членах *T* (различие множеств не может фиксироваться по отсутствию в них каких-то элементов, так что если X_i отсутствует в X_i, то это не означает, что найдется X_j и $X_i \in X_j$).

Положим показывать элемент, специфицирующий соответствующий член *T*, т.е. позволяющий отличить *i*-й член *T* от *j*-го члена *T*, вещью. Не будем дискутировать о содержании данного понятия. Ограничимся лишь констатацией, что здесь мы имеем дело с немножественной трактовкой элементности, о чем упоминалось выше. Немножественная природа элементности существенна уже тем, что не позволяет зацикливаться при выяснении отличия множеств друг от друга. Если бы элемент, отличающий множество X_i от множества X_j, был множеством, то опять возникала бы проблема выяснения отличия этого множества от других и т.д., так что мы не смогли бы гарантировать, что *T* состоит более чем из одного множества.

Итак, в каждом из членов *T*, признаваемых различными совокупностями, есть хотя бы одна вещь в качестве элемента, специфицирующего данный член *T*. Теперь от нас не требуется ничего большего, кроме способности не смешивать вещь с множеством (единое целое с многим). Для этого достаточно потребовать исключения из универсума исходных множеств (объема абстрактной множественности) одноэлементного множества $\{I\}$, которое позволяет называть вещь *I* множеством (предполагается, что в универсуме множеств *У* в этом случае остаются в качестве объектов только множества, а вещи могут быть лишь элементами множеств, что и свидетельствует о том, что необходимые условия созданы и смешения неопределенной количественности «*H*» с качественной определенностью, олицетворяемой «*I*», происходить не должно).

После этого среди членов *T* уже автоматически не может оказаться множества, состоящего из одной вещи. Таким образом, члены *T* –

нормальные совокупности вещей, и ни одна подобная совокупность, не являясь вещью, не может быть собственным элементом. Соответственно T отличается от любого своего члена, а потому не может оказаться в их собрании.

Проделанный анализ позволяет сформулировать следующую лемму.

Лемма. Пусть T – собрание множеств из $У$, отличное от K. Если T задается условием «не быть собственным элементом» (т.е. $T = \{X_i \mid X_i \notin X_i\}$, $i > 1$), то T не является собственным элементом $T \notin T$.

Приведем доказательство этой леммы, которое важно в плане прояснения и систематизации интуиции. В доказательстве используются принцип абстракции A, принцип объемности $Э$ и принцип разнообразия R.

Доказательство. По условию леммы T состоит из различных множеств. Значит, в каждом из членов T есть хотя бы один элемент, не входящий в другие члены T. Рассмотрим возможные варианты элементной структуры членов T:

1) чисто множественный вариант (все элементы X_i – множества);

2) смешанный вариант (одни члены T состоят из множеств, другие – из немножеств);

3) промежуточный вариант (некоторые элементы X_i – множества, некоторые – немножества);

4) чисто немножественный вариант (все элементы X_i – немножества).

Для случая 1 невозможно гарантировать существование различных множеств в T, о чем уже говорилось выше: не имея эталона сравнимости элементов ($\varnothing$, традиционно выступающее в роли подобного эталона, исключено из $У$ при решении K), нельзя судить об элементном составе множеств. Поэтому для произвольного члена T нельзя указать элемент, отличающий его от других гипотетических членов T. Всякое указание, будучи фиксацией некоторого множества, в свою очередь, требовало бы нового указания уже относительно отличия данного множества от других и т.д., оставаясь незавершенным. Об этом уже говорилось выше.

Таким образом, при чисто множественной трактовке членов T нельзя утверждать, что T состоит более чем из одного множества. Заметим, что без дополнительных соглашений невозможно утверждать, что «$X_i \notin X_i$» влечет $\exists X_j$ из T и $X_i \in X_j$. Соответственно данный случай подлежит отбраковке («спасать» условие $i > 1$ ценой отказа от принципа A себе дороже).

Случай 2 отбраковывается из-за возможного нарушения принципов A и O. В самом деле, смешанный вариант предполагает существование двух различных образов T: T_1 – собрания всех множеств X_i^1 и T_2 – собрания всех немножеств X_i^2 (элементы X_i^2 ранее названы вещами), равнообъемность которых ($T_1 = T_2$) ниоткуда не следует, ибо противоречит принципу R.

Из двух оставшихся вариантов интерес представляет только случай 4. «Промежуточный» случай 3 является лишь «консервативным расширением» последнего, репрезентирующим интуицию вторичности множеств относительно вещей. Члены T в варианте 4 являются конкретными совокупностями – множествами книг, букв, чисел и т.п., т.е. всего, что интуитивно подразумевается нами, когда заходит речь о различных множествах.

Очевидно, что свойство «$X_i \notin X_i$» выполняется в этом случае автоматически, так как ни одно множество вещей по определению не может быть вещью. Таким образом, $T \notin T$, поскольку T, будучи по составу «чистым» множеством, не может быть одним из своих членов, состоящих из немножеств (вещей). По этой же причине $T \notin T$, если члены T образуются смешением множеств и вещей (случай 3). Доказательство завершено.

* * *

Предложенное решение парадокса P, так же как и ранее полученное решение парадокса K, уточняет смысл понятия абстрактной множественности, исключая из объема последнего «множество без элементов» ($\varnothing$) и «элементы без множеств» (вещи). Устранение вещей из контекста оперирования абстрактной множественностью позволяет избегать крайностей номиналистской трактовки «множества вообще» как совокупности конкретных объектов. Разумеется, при исключении вещей из контекста множеств мы не утрачиваем способности отличать понятие элемента от понятия множества. Следует лишь иметь в виду, что оперирование абстрактной множественностью автоматически приводит к столь же абстрактной трактовке элементности. В этом смысле понятие «элемент множества» становится логически нерасчленимым и неанализируемым, так что «природа» элементности исключается из рассмотрения.

Наполнение понятия множеств конкретным содержанием, т.е. развертывание теории множеств, предполагает овладение понятиями мощности (числа) и порядка. Если предполагать, что мощность не требует счета, а требует лишь способности различать эквивалентные и неэквивалентные совокупности (т.е. некоторого качественного ресурса), то приходится допустить, что данные понятия – логические, формальные. Следовательно, рождение количества происходит через применение к множествам технологии двузначного, т.е. истинностного, оценивания. Очевидно, что это требует дифференциации самой истинности: различные выражения истинного должны обрести определенную меру – меру информативности, что предполагает введение соответствующей семантики для истинностных пропозиций [12].

Примечания

1. См.: *Мадер В.В.* Введение в методологию математики. – М., 1995. – С. 49.
2. *Цехмистро Д.* Диалектика множественного и единичного. – М., 1972. – С. 71.
3. См.: *Кюнг Г.* Онтология и логический анализ языка. – М., 1999. – С. 131.
4. См.: *Volenski Y.* Filozoficzna szkola lwowsko-warszawska. – Warszawa, 1985.
5. *Клини С.* Введение в метаматематику. – М., 1957. – С. 42.
6. Там же. – С. 42–43.
7. *Целищев В.В.* Философия математики. – Новосибирск, 2001. – С. 64.
8. Там же. – С. 75.
9. См.: *Фреге Г.* Логические исследования. – М., 1999; *Гудстейн Р.* Математическая логика. – М., 1961.
10. См.: *Френкель А., Бар-Хиллел Й.* Основания теории множеств. – М., 1968.
11. См.: *Переверзев В.П.* Семантика теории множеств // Философские основания научной теории. – Новосибирск, 1985.
12. Подробнее см.: *Черепанов С.К.* Философия неопределенности. Ч.I: Неопределенность и парадоксы. – Новосибирск, 2004.

Институт философии и права
СО РАН, Новосибирск

Cherepanov, S.K. **Kantor's and Russel's antinomies and the problem of entity nature of abstract sets.**

The paper analyzes the problem of entity in naive Kantor's set theory. The author shows that the notion of an abstract set presupposes an abstract understanding of entity. It makes impossible to think of a set without entities which leads to Kantor's antinomy, or to think of an entity without sets which leads to Russell's antinomy.