*Из писем в редакцию**

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ДЛИНЕ И АКТУАЛЬНОМ НУЛЕ

Ю.Г. Решетняк

Я прочитал заметку профессора С.С.Кутателадзе «Актуальный нуль» и ответ на нее доктора философских наук О.В.Шарыпова, опубликованные в журнале «Философия науки». Какие события стоят за полемикой, содержащейся в этой заметке, ответом на нее и другими материалами, связанными с упомянутыми публикациями? Путешествуя по Интернету, один из ее участников (а именно, С.С.Кутателадзе) с удивлением для себя обнаружил, что в Сибирском отделении Российской академии наук совершено крупное математическое открытие, о котором ему до этого момента ничего не было известно. Это открытие, однако, было включено в перечень основных достижений Сибирского отделения РАН за 1998 год.

Исходя из понятия фундаментальной длины, известного из теоретической физики, некоторые сотрудники Института философии и права СО РАН ввели новое математическое понятие – понятие актуального нуля и построили арифметику, в которой роль обычного нуля исполняет актуальный нуль. Детальное ознакомление с теорией актуального нуля очень удивило С.С.Кутателадзе и, более того, его удивление перешло в возмущение. Дело в том, что изобретатели актуального нуля, как видно из их сочинений, к сожалению, формулируют свои результаты, с точки зрения математика, неправильно.

---

* Все письма публикуются в авторской редакции (*Прим. редколлегии*).

Приведем хотя бы фразу из отчета Сибирского отделения: «Математически фундаментальная длина представлена новым объектом – актуальным нулем множества...». Из этой формулировки можно заключить, что в любом множестве, встречающемся в математике, используя метод авторов открытия, можно указать новый элемент – его актуальный нуль. Всякий математический объект есть множество, в связи с чем данное «открытие» представляется имеющим глобальное значение.

Более тщательное рассмотрение трудов авторов по данной теме позволяет заключить, что речь идет не о всех, вообще, множествах, а о некотором конкретном множестве. Точное определение этого множества из трудов создателей актуального нуля усмотреть достаточно трудно. Другое обстоятельство, которое шокировало С.С.Кутателадзе, состоит в том, что математика, используемая авторами, в высшей степени тривиальна. О своих наблюдениях С.С.Кутателадзе посчитал необходимым поведать научной общественности и подготовил письмо в газету «Наука в Сибири» и затем, по рекомендации одного из членов редколлегии журнала «Философия науки», реплика была направлена в этот журнал. Эта заметка С.С.Кутателадзе была напечатана вместе с пространным ответом на нее О.В.Шарыпова. Заметку С.С.Кутателадзе редакция журнала «Философия науки» поместила с указанием, что в публикации сохранены все особенности пунктуации и стиля автора. (Других критикует, а посмотрите, как сам пишет!)

О.В.Шарыпов считает, что критика С.С.Кутателадзе никак не аргументирована. Уважаемый господин О.В.Шарыпов заблуждается! В своем письме С.С.Кутателадзе приводит две или три цитаты из критикуемых им сочинений. И это не какие-то выдернутые из контекста случайные фразы – среди них основополагающие для теории О.В.Шарыпова развернутые определения понятий фундаментальной длины и актуального нуля. Каждое из цитируемых основных определений представляет собой мешанину из математических, философских и физических терминов. Я не знаю, как обстоит дело с физическими и философскими терминами, но математические термины автор применяет, к сожалению, без четкого понимания их смысла. Это самый сильный аргумент против сочинений доктора философских наук О.В.Шарыпова! Если Вы претендуете на то, чтобы сказать новое слово в математике, – в данном случае дело обстоит именно так, – то выучите хотя бы математическую терминологию, относящуюся к делу, а, главное, научитесь правильно ее применять. Это условие необходимо для того, чтобы Вам и Вашим открытиям математики поверили.

Нуль в математике – это число, добавление которого к сумме сумму не меняет. Именно так действует «актуальный нуль» О.В.Шарыпова. Между тем О.В.Шарыпов, не понимая простейших математических истин, пишет в своей докторской диссертации, что «алгебра и геометрия на множестве с актуальным нулем не изучались математиками даже на аксиоматическом уровне». Каждому серьезному ученому ясно, что переименованием нуля в «актуальный нуль» никаких проблем решить не удастся ни в физике, ни в математике, ни даже в философии.

Поскольку письмо профессора С.С.Кутателадзе изначально предназначалось для газеты, то более подробный анализ сочинений О.В.Шарыпова вряд ли был возможен в пределах этого письма. Некоторые конкретные замечания в письме С.С.Кутателадзе, однако, приводятся. В геометрии пространства, построенной по рецептам О.В.Шарыпова, получается, что гипотенуза прямоугольного треугольника, составленного классическими векторами, может равняться катету. В письме О.В.Шарыпова отсутствует ответ на это замечание С.С.Кутателадзе.

Также игнорируется столь же бесспорное с математической точки зрения указание С.С.Кутателадзе на то, что никаких новых нулей и чисел О.В.Шарыпов не изобрел вовсе. Он всего лишь **переименовывает** положительные числа, сдвигая их по оси. Таким образом, рассматривается просто другая реализация алгебраической системы, составленной из обыкновенных положительных чисел. Никаких новых алгебраических свойств на этом пути получить в принципе невозможно. Несколько ниже я разъясню это обстоятельство более подробно.

Представление о наименьшей инвариантной протяженности, как пишет в своем ответе О.В.Шарыпов, должно учитываться в математическом формализме, применяемом физиками, который не должен использовать нефизические представления о «сколь угодно» малых величинах. Но на этих представлениях основываются дифференциальное и интегральное исчисления – рабочий аппарат физики еще со времен И.Ньютона, не утративший свое значение и в нашем XXI-м веке! То, что эти разделы математики физикам рано списывать в архив, легко убедиться, перелистывая любой из современных физических журналов. Поэтому данный тезис О.В.Шарыпова представляется крайне спорным.

В своем ответе О.В.Шарыпов отмечает, что С.С.Кутателадзе является соавтором монографии, в которой используются такие понятия как «актуальная бесконечность» и «актуальная бесконечно малая величина», и в отличие от многих, знаком не только с идеями Г.Кантора, но и с идеями П.Вопенки. Поэтому С.С.Кутателадзе должен быть знаком и с проблемой соответствия/несоответствия между финитистскими физическими представлениями и инфинитистскими теоретико-множественными концепциями. Попытки построить математику, не использующую понятие актуальной бесконечности, предпринимались задолго до П.Вопенки. Исследования, ведущиеся в этом направлении, безусловно являются важными и полезными. Они позволяют лучше понять некоторые принципиальные аспекты математики. Но пока математика без актуальной бесконечности или с ограниченным использованием бесконечности оказывается значительно более сложной и потому менее эффективной, чем математика, основанная на классической теории множеств. Вопрос о связи математики с реальным миром, по-видимому, значительно сложнее, чем это представлялось в середине прошлого века.

Стоит подчеркнуть, однако, что обсуждение современных взглядов на актуальные бесконечно большие и бесконечно малые числа, о которых, оказывается, совсем неплохо знают и математики, никакого отношения к «открытиям» О.В.Шарыпова не имеет. Об этих предметах немало сказано в сочинениях профессиональных математиков и, в частности, в книгах С.С.Кутателадзе и его сотрудников. Излагаемые там современные воззрения на числа, вскрытые математической логикой XX-го века, в работах О.В.Шарыпова не используются.

У читателя, естественно, может возникнуть вопрос: а что же все-таки сделано доктором философских наук О.В.Шарыповым и его коллегами и почему это так разозлило математиков? Отвечая на эти вопросы, я буду ссылаться на работы [3] и [4], которые я нашел в Интернете.

Что такое фундаментальная длина по О.В.Шарыпову? Повторим определение, которое цитирует С.С.Кутателадзе. Фундаментальная длина есть «*недостижимый (асимптотический) нижний предел множества пространственных размеров вещественно-полевых объектов в восприятии вещественного наблюдателя* (*т.е. множества относительных длин*)». Отметим сразу, что слова «асимптотический» и «недостижимый» в математике не являются синонимами. Понятие – нижний предел множества – математикам неизвестно. Говорят о нижнем пределе последовательности, функции и т.п. По-видимому, термин «нижний предел» здесь означает то, что математики называют нижней гранью или точной нижней границей множества. (Если следовать примеру редакции «Философия науки», я не должен бы это писать, и мне следовало бы предоставить О.В.Шарыпову рыться в математических книгах и искать подходящий термин самому.)

Теперь относительно актуального нуля. В работе [3] сказано следующее: «...мы приходим к определению нового понятия, являющегося адекватной абстракцией фундаментальной длины – *актуальному нулю*. По определению это *инвариантный конечный элемент множества, в асимптотическом смысле предельный для любых убывающих последовательностей, состоящих из элементов этого множества*». Непонятно, о каком множестве идет речь. Если имеется в виду множество, элементы которого есть действительные числа, то убывающих последовательностей, образованных его элементами, может быть очень много, и каждая из них имеет свой предел. Мы получаем, что множество имеет столько актуальных нулей, сколько существует убывающих последовательностей, составленных из его элементов! Фактически в данном случае из «определения» О.В.Шарыпова следует, что каждый элемент множества является его актуальным нулем. Таким образом, в работе [3] корректное определение актуального нуля отсутствует. Реально же О.В.Шарыпов, как уже отмечено выше, осуществляет простейшее изоморфное преобразование системы положительных чисел с помощью сдвига правой полуоси на величину l_{pl} вправо и переопределения соответствующим образом операций сложения и умножения. Современная математика, разумеется, не считает новыми изоморфные образы известных алгебраических систем, поскольку достаточно изучить свойства только одной из изоморфных систем.

Обратимся к работе [4]. В ней строится некоторая «новая» арифметика, которая, как считают ее авторы, должна лежать в основе современной теории пространства-времени. Прежде всего о понятии фундаментальной длины. Как в [3], так и в [4] сказано, что она конечна и инвариантна. В чем состоит свойство инвариантности фундаментальной длины? В [3] об этом говорится несколько уклончиво и складывается впечатление, что точное определение откладывается до внесения необходимых уточнений в теорию относительности. В [4] имеется в виду лоренц-инвариантность. Но всякая величина, имеющая физическую размерность длины, может быть инвариантной относительно лоренцевых преобразований в том и только в том случае, если эта величина равна нулю! Авторы требуют, однако, чтобы фундаментальная длина была отлична от нуля. Мы приходим, таким образом, к противоречию и, следовательно, в сочинениях, которые обсуждаются здесь, нет удовлетворительного определения понятия фундаментальной длины. Фактически же в обсуждаемых сочинениях используется обычная планковская длина, т.е. некоторая постоянная, имеющая размерность длины.

В работе [4] строится некоторая арифметика, которая, как утверждают авторы, является неархимедовой и свободна от парадоксов, выражаемых известными апориями Зенона. Конструкция, посредством которой получена эта новая арифметика, в математическом отношении абсолютно тривиальна и ожидать от нее каких-либо качественных прорывов в математике ли, в физике ли – нет никаких оснований.

Опишем эту арифметику, что не потребует много места. Рассматривается множество L чисел $l > l_{pl}$, где $l_{pl} > 0$ и есть фундаментальная длина: $l_{pl} = \sqrt{\hbar G / c^3} \approx 10^{-33}$ *см*. Иначе говоря, L есть интервал (l_{pl}, ∞) множества действительных чисел. Пусть φ есть отображение L на множество всех положительных чисел R^+, определенное условием $\varphi(l) = l - l_{pl}$, φ^{-1} – обратное отображение, то есть $\varphi^{-1}(r) = r + l_{pl}$ для всякого $r > 0$. Тогда все операции, определенные в R^+, автоматически переносятся в множество L. А именно, – полагаем для произвольных $l_1, l_2 \in L$ $l_1 \underset{\varphi}{+} l_2 = \varphi^{-1}[\varphi(l_1) + \varphi(l_2)]$ и, аналогично, $l_1 \underset{\varphi}{\times} l_2 = \varphi^{-1}[\varphi(l_1) \times \varphi(l_2)]$. Никакой новой арифметики при таком определении операций в множестве L не возникает. Алгебраическая система $(L, \underset{\varphi}{+}, \underset{\varphi}{\times})$, то есть множество L, наделенное операциями $\underset{\varphi}{+}$ и $\underset{\varphi}{\times}$, **изоморфно** множеству положительных чисел R^+. Всякое предложение, верное для множества R^+, автоматически оказывается верным и для множества L с операциями, определенными в нем, как указано выше. В частности, вопреки утверждению авторов, для множества L принцип Архимеда в этом множестве выполняется также, как и в R^+. Все трудности, связанные с апориями Зенона, остаются в силе и для построенной авторами «новой» арифметики. Заметим, кстати, что, вопреки утверждению авторов, алгебраическая система $(L, \underset{\varphi}{+}, \underset{\varphi}{\times})$, не является полем, так как оно не образует группы относительно операции сложения. (В этой системе нет отрицательных чисел.) Почему арифметика, построенная в L указанным способом, является дискретно-непрерывной и в чем состоит ее дискретность? По своим внутренним свойствам она ничем не отличается от множества R^+!

Множество $L = (l_{pl}, \infty)$ может отображаться на множество R^+ бесконечным числом способов. Выбирая в качестве φ отображения, отличные от указанного выше, мы сможем определить на L бесконечное множество арифметик, которые, однако, все изоморфны арифметике, заданной на множестве R^+.

Авторы часто ссылаются на работу В.Л.Рвачева [5]. В.Л.Рвачев – довольно известный специалист в области вычислительной математики, академик НАН Украины. Формально все проделанные в статье [5] вычисления – правильны. Однако, данная автором интерпретация полученных им результатов ошибочна. Никакой неархимедовой арифметики в ней не построено, так что название статьи вводит читателя в заблуждение. Именно поэтому статья В.Л.Рвачева рассматривается специалистами как досадное недоразумение, вызванное особенностями принятия работ к публикации в «Докладах».

Содержание этой статьи можно пересказать в очень немногих словах. Она также основана на иллюзии, состоящей в попытке получить новые алгебраические свойства алгебраической системы, отсутствующие в изоморфной ей системе. Всякий интервал $I = (a, b)$, где $a < b$, то есть совокупность всех вещественных чисел x таких, что $a < x < b$, может быть взаимнооднозначно отображен на множество всех действительных чисел R. Более того, это можно сделать бесконечным числом способов.

Пусть $\alpha : (a, b) \to R$ есть взаимнооднозначное отображение множества I на R, $\alpha^{-1} : R\ (a, b)$ – обратное отображение, то есть такое, что для всякого $x \in I$ выполняется равенство $x = \alpha^{-1}[\alpha\ (x)]$. Для произвольных $x, y \in (a, b)$ определим операции $\underset{\alpha}{+}$ и $\underset{\alpha}{\times}$, полагая $x \underset{\alpha}{+} y = \alpha^{-1}[\alpha(x) + \alpha(y)]$ и, аналогично, $x \underset{\alpha}{\times} y = \alpha^{-1}[\alpha(x) \underset{\alpha}{\times} \alpha(y)]$. Введем в I еще и отношение порядка $\underset{\alpha}{<}$, посредством соглашения: $x \underset{\alpha}{<} y$ в том и только в том случае, если $\alpha(x) < \alpha(y)$. Мы получим в результате некоторое упорядоченное поле $I_\alpha = ((a, b), \underset{\alpha}{+}, \underset{\alpha}{\times}, \underset{\alpha}{<})$. Это поле изоморфно полю действительных чисел R. Любое высказывание, верное относительно поля R, автоматически оказывается верным и для поля I_α. Справедливость этого утверждения следует из общих принципов математической логики. Формальное доказательство занимает несколько строк. Конструкция, как видим, в точности та же, что и в работе [4].

В работе [5] рассматривается случай, когда I есть интервал $(-c, c)$. В качестве функции α, отображающей этот промежуток на множество действительных чисел R , можно взять, например, любую из функций $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2c}, \frac{x}{c-|x|}$ или $\ln\frac{c+x}{c-x}$. Каждая из этих функций непрерывна и является строго возрастающей на промежутке $(-c, c)$ и при $x \to -c$ стремится к пределу, равному $-\infty$, а при $x \to c$ имеет предел, равный ∞. Отсюда следует, что каждая из них отображает промежуток $(-c, c)$ на множество R. В.Л.Рвачев использует последнюю функцию. В этом случае операция сложения выражается через обычные арифметические операции следующим образом: $x \underset{\alpha}{+} = \frac{x+y}{1+xy/c^2}$. Эта формула совпадает с формулой сложения скоростей в специальной теории относительности. Это случайное совпадение привело уважаемого автора к мысли, что придуманная им арифметика имеет определенную ценность. Может быть, это и так, но теория относительности здесь абсолютно не причем.

Упорядоченное числовое поле F называется архимедовым, если выполнено следующее условие.

Если число $a > 0$, $a \in F$, то для любого $x \in F$ найдется натуральное число n такое, что $x < na$. Для того, чтобы доказать неархимедовость арифметики, построенной В.Л.Рвачевым, согласно этому определению – надо указать $x \in (-c, c)$ и a, $0 < a < c$, такие, что неравенство $x < na$ не выполняется ни при каком n. Здесь na есть величина, полученная из a n-кратным применением операции $\underset{\alpha}{+}$, $na = a \underset{\alpha}{+} a \underset{\alpha}{+} a \ldots \underset{\alpha}{+} a$ (n слагаемых.) Такие x и $a > 0$ в промежутке $(-c, c)$ найти невозможно – по той причине, что их нет в множестве R. В.Л.Рвачев считает, что поле $((-c, c), \underset{\alpha}{+}, \underset{\alpha}{\times}, \underset{\alpha}{<})$ – неархимедово, так как $na < c$, как бы ни было выбрано $a > 0$. Дело, однако, в том, что число с не является элементом промежутка $(-c, c)$!

Мне могут возразить, что работы О.В.Шарыпова относятся к философии, основные понятия которой, в силу своей общности, имеют расплывчатые очертания и не допускают таких точных определений, к каким привыкли математики, что неправильно переносить требования, обычные для математических исследований, на работы философского содержания. На это я могу ответить только, что, – как учили меня когда-то, – истина всегда конкретна. В данном случае автор претендует на некоторое математическое открытие. Эпоха дилетантов давно прошла и в наш XXI-й век – чтобы изобрести что-то дельное, необходимо свободно владеть современным инструментарием науки хотя бы в той узкой области, которая Вас интересует.

С помощью рассуждений в стиле «актуальный нуль представляет собой диалектическое единство бытия и небытия» никаких открытий в области математики и физики сделать не удалось и не удастся. В этом суть справедливой критики, высказанной С.С.Кутателадзе в адрес философов, пытающихся решать псевдонаучными методами проблемы математики и физики.

На основании сказанного, я пришел к следующему мнению.

Первое. Как бы ни была неприятна доктору философских наук О.В.Шарыпову критика его статей «Фундаментальная длина: явление и сущность» и «О возможности объединения свойств инвариантного покоя и относительного движения на основе новой модели пространства с минимальной длиной», по существу профессор С.С.Кутателадзе прав. При этом ни о каком «заказе» этой критики не может быть и речи.

Второе. Мне представляется, что доктору философских наук О.В.Шарыпову необходимо переосмыслить свои занятия математикой и полностью согласиться со справедливой критикой по существу, высказанной специалистом-математиком, доктором физико-математических наук, профессором С.С.Кутателадзе.

Третье. Думаю, что было бы правильным, если бы Институт философии и права СО РАН дезавуировал информацию об «открытии» актуального нуля, включенную в число важнейших достижений Сибирского отделения РАН за 1998 год, приняв этот случай, как недоразумение.

Литература

[1] *Кутателадзе С.С.* Актуальный нуль // Философия науки. – 2004. - № 2 (21). – С. 121–123.

[2] *Шарыпов О.В.* Фундаментальная длина – физический референт актуального нуля // Философия науки. – 2004. - № 2 (21). – С. 124–150.

[3] *Шарыпов О.В.* Фундаментальная длина: явление и сущность. – Интернет.

[4] *Корухов В.В., Шарыпов О.В.* О возможности объединения свойств инвариантного покоя и и относительного движения на основе новой модели пространства с минимальной длиной. – Интернет.

[5] *Рвачев В.Л.* Неархимедова арифметика и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности // Доклады АН СССР. – 1991. - Т. 51, 4. – С. 884 – 889.

Институт математики СО РАН,
Новосибирск