Проблемы логики и методологии науки

МОЖНО ЛИ ДОКАЗАТЬ ТЕЗИС ЧЕРЧА?*

А.В. Бессонов, А.В. Хлебалин, В.В. Целищев

Тезис Черча – одно из наиболее важных положений в исследованиях, связанных с вычислимостью. Он является частью математической практики и признается истинным подавляющей частью исследователей. Хотя этот тезис напрямую связан с математической логикой, его нельзя назвать математическим результатом, поскольку он не представляет собой традиционную математическую теорему. В этом смысле он обладает, как многие полагают, уникальным статусом, поскольку его обоснование возможно только путем обращения к человеческим, вероятно, даже идеализированным, возможностям. Таким образом, обсуждение тезиса Черча в значительной степени связано с философскими вопросами соотношения математики и физической осуществимости человеческих действий. Больше того, речь идет о психологии человеческих способностей к вычислению. Если и существуют какие-то аргументы в пользу неразрывности связи философии и математики, то трудно найти что-то лучшее, чем тезис Черча. Действительно, есть даже интересные программы в философии математики, которые напрямую увязаны с тезисом Черча. Например, это часть финитистской программы Гильберта – так называемый тезис Тейта, согласно которому финитизм как философская программа эквивалентен рекурсивному мышлению [1].

* Исследования, результаты которых представлены в данной статье, поддержаны Междисциплинарным интеграционным проектом Сибирского отделения РАН (грант № 1, 2006–2008 гг.)

Тезис Черча: математическое или философское утверждение?

Тезис Черча формулируется не в формальном языке математики, а в обыденном языке. В его формулировке используются неточные понятия алгоритма и эффективной механической процедуры. Целью тезиса является характеристика класса вычислимых функций. И поскольку понятия, используемые в формулировке тезиса, принадлежат к дотеоретическому языку, в котором понятия вычислимости и алгоритма относятся к интуиции, на первый взгляд кажется, что никакого точного математического доказательства тезиса быть не может. Сам по себе тезис может быть лишь поддержан или не поддержан какими-то аргументами, и по крайней мере некоторые из них должны быть философскими. Тем не менее тезис говорит о математических понятиях, и странно было бы, если бы аргументация в отношении этих понятий была исключительно философской.

Целью данной статьи является обсуждение вопроса, возможно ли математическое доказательство тезиса Черча. Формулировка тезиса в самом общем виде увязывает два понятия: вычислимые функции и рекурсивные функции. Тезис может быть в этом отношении представлен так:

$$Q = R.$$

Здесь Q есть класс всех эффективно вычислимых функций, а R – класс всех рекурсивных функций. Таким образом, тезис утверждает, что

функция эффективно вычислима,
если и только если она рекурсивна.

Оба понятия – эффективно вычислимой функции и рекурсивной функции – опираются на фундаментальное понятие алгоритма. Интерес представляет то обстоятельство, что в некотором смысле сведение первых двух понятий к понятию алгоритма оказывается круговым. Дело в том, что понятие вычислимой функции является неформальным, можно сказать, интуитивным и некоторые интуитивные элементы этого понятия пересекаются, если не совпадают, с интуитивными элементами понятия алгоритма. Это видно уже из того, что алгоритм характеризуется как эффективная и полностью специфицированная процедура для решения проблем заданного типа. Понятие эффективной процедуры в значительной степени, очевидно, пересекается с понятием эффективного вычисления.

Второе понятие, входящее в тезис Черча, – рекурсивная функция – является четко определенным понятием, формальным понятием, и коль скоро понятие алгоритма лежит в основе понятия рекурсивной функции, алгоритму должны быть присущи формальные характеристики. В частности, полагается, что алгоритм не требует творческих компонентов, изобретательности или же интуиции. Больше того, применение алгоритма не подразумевает эмпирических или случайных процедур.

В основе обоих понятий, как уже говорилось, лежит понятие алгоритма. Это понятие является интуитивно ясным, поскольку математическая практика полна примеров использования таких способов рассуждения, принадлежность которых к классу алгоритмов попросту бесспорна. Ввиду этой ясности не очень понятно, в каком смысле полезно сведение данного понятия к понятию рекурсивной функции и понятию эффективно вычислимой функции. Другими словами, возникает вопрос, требуется ли вообще какое-то обоснование интуитивно ясного понятия. И действительно, само понятие эффективной вычислимости интуитивно и многие элементы интуитивности для алгоритма и эффективного вычисления совпадают. Ведь алгоритм характеризуется как эффективная и полностью специфицированная процедура для решения проблем заданного типа. Что касается понятия рекурсивной функции, то оно является точно определенным понятием. Но тогда и алгоритм должен рассматриваться как формальное понятие, как система инструкций, которые могут выполняться механическим устройством, не требуя применения каких-то творческих процедур. И здесь сведение рекурсивной функции к алгоритму носит оттенок круговой процедуры.

Если при этом сведении ставится цель уточнения смысла и содержания процесса вычисления, то надо заметить, что остается масса проблем, которые «разрешаются» по умолчанию. Так, предполагается, что алгоритм реализуется в конечное время конечным числом шагов. Мало того, этот процесс должен быть механическим, но что подразумевается под «механическим», неясно. Для понимания того, что собой все-таки представляет вычисление, требуется ясность в понимании эффективно вычислимой процедуры. Это один из аспектов, которые находятся в центре дискуссий о тезисе Черча.

Важно осознавать и то обстоятельство, что понятие вычислимой функции является понятием высокой степени абстракции. Действительные примеры человеческих вычислительных процессов могут не представлять собой подлинной парадигмы вычислений. Функция может быть вычислимой, даже если при этом для инструкций потребуется больше символов, чем атомов во Вселенной. Соответственно, время для вычисления значения эффективно вычислимой функции может быть больше времени существования человеческой расы. Эта абстрактность диктуется скорее отрицательным результатом, говорящим об отсутствии для некоторых проблем алгоритмического решения. Данный математический результат явился итогом интересных математических исследований. Как только задача доказательства несуществования алгоритмов стала предметом математического исследования, понадобилось дать точный математический смысл понятия алгоритма или эффективно вычислимой функции. Как известно, было предложено несколько экспликаций понятия вычислимой функции, среди которых λ-определимость, общая рекурсивность, вычислимость по Тьюрингу и др.

Убедительность тезиса Черча и математическое доказательство

В чем, собственно, состоит проблематичность тезиса Черча? Дело в том, что он приравнивает математически точное, формальное понятие к понятию неформальному, интуитивному. Коль скоро в этом равенстве одно понятие не является точно определенным, его нельзя доказать математически. В этом достигнут консенсус большинством исследователей. Но здесь возникает вопрос: что значит «доказать» и что значит «математически»? Обычно подразумевается, что термин «доказательство» должен пониматься как «формальное доказательство». Если речь идет действительно только о формальном доказательстве, тогда тезис Черча не может быть доказан, поскольку формальное доказательство не может быть применено к интуитивным составляющим. Но как известно, формальное доказательство является некоторым пунктом в длинной цепи различных по строгости типов доказательств, и было бы, видимо, ошибочным полагать, что тезис Черча должен быть предметом именно формального доказательства.

Теперь обратимся к термину «доказать математически». Если речь идет о дедуктивном доказательстве, тогда тезис Черча не может быть доказан. Строго говоря, другого доказательства помимо дедуктивного быть не может. Но нужно учесть, что математическая деятельность отнюдь не сводится к формальным доказательствам. В нее могут входить догадки, гипотезы, озарения и интуитивные соображения. Если принять последние в качестве вполне «законных» способов математической деятельности, тогда никаких препятствий к попыткам считать «математически доказанным» тезис Черча нет.

Э. Мендельсон придерживается как раз такой точки зрения, полагая, что применительно к тезису Черча мы должны иметь в виду именно расширительное понимание терминов «доказательство» и «доказать математически» [2]. Это сильнейшим образом расходится с распространенными взглядами на определение того, каков эпистемологический статус тезиса Черча. Рассмотрим «ортодоксальные» взгляды на эту проблему.

Тезис Черча состоит из двух частей. В одной из них утверждается, что все рекурсивные функции вычислимы. В этом невозможно сомневаться, потому что рекурсивные функции вычислимы уже по способу своего построения. Более проблематичной оказывается вторая часть тезиса, а именно то, что все вычислимые функции являются рекурсивными функциями, т.е. что $Q \subseteq R$.

Какие собственно аргументы могут быть приведены в пользу $Q \subseteq R$? Прежде всего, тут важно обращение к практике. В математике известно много вычислимых функций, и все эти функции, как показала практика доказательства, являются рекурсивными. Один вид возражений против тезиса Черча основан на попытках найти такие вычислимые функции, которые не были бы при этом рекурсивными. Однако ни одна из таких попыток до сих пор не оказалась успешной. Другими словами, не было представлено ни одного примера такой вычислительной функции, которая не была бы рекурсивной. Однако подтверждением тезиса Черча является еще одно не менее важное обстоятельство. Было показано, что все конкретные методы получения вычислимых функций из данной вычислимой функции вновь ведут к рекурсивной функции. То есть не было дано метода, который вел бы от вычислимой функции к вычислимой и который не вел бы от рекурсивной функции к рекурсивной.

Одним словом, тезису Черча в его части $Q \subseteq R$ до сих пор не приведено контрпримеров. Серию подобных аргументов в пользу тезиса Черча Р. Муравский называет эвристическими аргументами [3]. Эвристическими они являются потому, что отсутствие контпримеров в настоящее время не предотвращает в принципе их более позднее появление, а сам факт их отсутствия – это скорее вспомогательное средство для обоснования тезиса, подтверждающее его правдоподобность.

Эвристические аргументы подобного рода с точки зрения дедуктивной математики имеют серьезный дефект, будучи эмпирическими по своей природе. Действительно, математическая практика есть практика эмпирическая, поскольку здесь действуют психологические и социологические обстоятельства, присущие индивидуальной работе математика и относящиеся к стандартам математического профессионального сообщества. Даже если эти обстоятельства не всегда могут быть с полным основанием названы эмпирическими в строгом смысле слова, их можно назвать квазиэмпирическими. Исходя из этого следует признать, что для обоснования тезиса Черча одних только эвристических аргументов мало. Требуются более прямые аргументы, которые заключаются в обращении к понятию вычисления. Идея состоит в том, чтобы показать, что только рекурсивные функции могут быть вычислимыми. Именно этот путь избран Тьюрингом, который дал детальный анализ процесса вычисления значения функции. Он показал, что любая возможная вычислительная процедура имеет адекватный аналог в машине Тьюринга. Это и есть прямой аргумент в пользу тезиса Черча, поскольку в данном случае становится ясно, что каждая вычислимая функция рекурсивна. Это одна из причин того, что часто говорят о тезисе Черча – Тьюринга. Действительно, прямой аргумент в пользу тезиса Черча был представлен именно Тьюрингом.

Но по-настоящему убедительными аргументами в пользу тезиса оказались скорее социологические обстоятельства, если их можно так назвать. Дело в том, что в ходе анализа понятия вычислимости были даны различные ее экспликации, экстенсионально эквивалентные и равные классу R рекурсивных функций. «Социология» тут состоит в предположении, что авторы всех таких экспликаций имеют одну и ту же интуицию понятия вычислимости. Таким образом, концепция вычислимости, оказывается, не выходит за пределы класса рекурсивных функций.

Для большей убедительности такого рода аргументации надо понять, что собой представляет процесс вычисления. С математической точки зрения вычисление есть просто выполнение алгоритма. Если некоторое устройство – человек или машина – выполняет алгоритм, т.е. вычисляет, значит, существует некоторое отношение моделирования между этим устройством и формальной спецификацией алгоритма. Но какого рода это отношение? Вопрос весьма трудный, потому что вычислительным устройством при слишком расширительном толковании этого отношения могут считаться самое простое механическое устройство и самый утонченный человеческий мозг. Ясно, что уточнение понятия вычисления должно быть достаточно плодотворным, чтобы покрыть все интересные случаи и не быть приложимым к случаям тривиальным или чрезвычайно сложным. Многие исследователи полагают, что в некотором важном смысле анализ вычисления, проделанный Тьюрингом, является как раз таким плодотворным подходом, при котором математическая составляющая экспликации хорошо совмещается как с механическими, так и мыслительными представлениями о вычислении. Понятие абстрактной математической машины как полезной идеализации оказывается наиболее убедительным представлением процесса вычисления. Плодотворность понятия машины Тьюринга подтверждается тем, что определения, в которых используются те или иные формальные системы: вычислимые функции по Маркову, Эрбрана – Геделя – Клини определение вычислимых функций, определение вычислимости через представимость в формальной системе, и λ-определимость Черча или же теория нормальных систем Поста, – сводимы с точки зрения фундаментальности и «естественности» к этому понятию.

Итак, даже если вычисление и представляет собой сложнейший процесс, он хорошо моделируется машиной Тьюринга. А это, в свою очередь, значит, что вычисление может рассматриваться не как интуитивное понятие, которое требует уточнения с помощью математического понятия, а как математическое понятие, претерпевающее ряд трансформаций по ходу уточнения проблем, стоящих перед математикой. Но в этом случае тезис Черча можно доказать математически.

Сходные «тезисы» в математической практике

Здесь мы имеем нетрадиционную картину экспликации интуитивного понятия формальным понятием. Речь идет о типичном для математической практики случае приемлемых математических рассуждений. Такого рода рассуждения Мендельсон называет «тезисами» [4]. Он приводит несколько примеров подобных «тезисов», в которых фиксировалась эволюция математических понятий от менее строгих к более строгим.

Рассмотрим один из таких примеров – логическую валидность. Современная теоретико-модельная трактовка логической валидности состоит в том, что первопорядковое предложение логически валидно, если оно истинно во всех структурах. Встает старая проблема соизмеримости и несоизмеримости научных понятий. Скажем, понимали ли авторы «Principia Mathematica» логическую валидность так, как она понимается сегодня? В некотором смысле теоретико-модельное понятие есть экспликация интуитивного понятия, но все таки более фундаментальное представление о соотношении этих понятий состоит в том, что в «Principia Mathematica» уже содержится понятие логической валидности в скрытом виде. Последующие изменения в понятии суть результат его развития в слегка или сильно измененной структуре. Другими словами, следует принять скорее предположение о непрерывности понятий, нежели предположение об их несоизмеримости. Сам Мендельсон не рассматривает эту проблему с точки зрения возможной несоизмеримости, а просто утверждает, что экспликация интуитивных понятий есть типично математическое занятие и по этой причине «тезис» об эквивалентности интуитивного понятия и его экспликации может быть доказан. С нашей точки зрения, это вряд ли оправданно, если не привлекать к рассмотрению противопоставления несоизмеримости и непрерывности.

Непрерывность интуитивного понятия логической валидности демонстрируется довольно хорошо, если сопоставить теоретико-модельную концепцию с интуицией Рассела и Фреге. Теоремой теории моделей является утверждение, что предложение, которое истинно для всех структур кардинальности A, истинно также для всех структур меньшей кардинальности. В ранних версиях логической валидности спецификации кардинальности структур быть попросту не могло, но если полагать A кардинальным числом объектов Вселенной, тогда, по свидетельству того же Мендельсона, концепция логической валидности Рассела и Фреге влечет теоретико-модельную концепцию логической валидности.

Другой пример у Мендельсона – это концепция функции. Важной чертой понятия функции в классической математике является то, что каждая функция ассоциирована с правилом ее вычисления. Это правило задается формулой, которая представляет собой алгоритм вычисления. Оба ингредиента – понятие функции и понятие правила вычисления в этой ситуации имеют интуитивный характер. Подобные функции были «гладкими» в том смысле, что имели аналитический характер. Но в ходе развития математики были найдены такие функции, которые никак не были «гладкими», и это обстоятельство заставило расширять понятие функции. Серия подобных расширений привела к определению функции в теоретико-множественных терминах как множества Φ упорядоченных пар. Каким тогда становится соотношение интуитивного понятия функции и формального определения? Во-первых, интуитивно понятая функция определяет однозначно множество упорядоченных пар. Во-вторых, такое множество Φ может рассматриваться как определяющее правило для вычисления функции: каждому x приписывается объект y, такой что $(x, y) \in \Phi$. Таким образом, мы имеем опять-таки отождествление интуитивного понятия с формальным: интуитивно понимаемая функция отождествляется с множеством упорядоченных пар. Этот «тезис» может именоваться тезисом Пеано, который первым явно осознал такое отождествление. В значительной степени тезис Пеано аналогичен в своем эпистемологическом статусе тезису Черча.

Связанным с тезисом, рассмотренным выше, еще более убедительным примером такого рода тезисов является привычное для всех определение непрерывной функции с помощью формального δ-определения, которое можно найти в учебниках. Функция считается непрерывной, если она удовлетворяет этому определению Коши – Вейерштрасса. Данный «тезис» любопытен тем, что его повседневность в виде распространенной педагогической практики не позволяет разглядеть ту самую связь интуитивного и формального, которая характерна для математической практики. Эту связь в данном случае мы считаем чем-то само собой разумеющимся, поскольку «доказываем» в определенном смысле непрерывность функции. Но можно ли этот пример полагать подтверждением того, что тезис Черча полностью аналогичен «тезису» Коши – Вейерштрасса? Ведь определение непрерывности, как говорят, есть правильная формулировка интуитивного понятия. Конечно, «правильность» – это результат долгой математической практики и массы косвенных подтверждений со стороны других областей математики. Но вот убедиться в том, что каждая функция, которая может быть вычислена алгоритмом, может быть вычислена и машиной Тьюринга, не так уж легко. Возможно, что все дело во времени, которое проходит с момента выдвижения тезиса. Действительно, то, что проблематично для одного поколения, кажется простым другому.

Если обратиться к понятию длины кривой, то здесь ситуация аналогична. Интуитивное понятие длины кривой на плоскости опирается на представление о сумме аппроксимирующих сегментов прямых. Сам этот процесс суммирования интуитивно очевиден, и, тем не менее, именно он получает статус определения длины кривой.

М. Клайн пишет по этому поводу: «Вплоть до 1650 г. никто не верил, что длина кривой может быть приравнена к длине прямой. В самом деле, во второй книге «Геометрии» Декарт говорит, что соотношение между кривыми и прямыми не может быть известно вообще. Но Робертваль нашел длину дуги циклоиды. Архитектор Кристофер Рен (1632–1723) выпрямил циклоиду… Ферма также вычислил длину некоторых кривых. Эти люди обычно находили сумму сегментов и затем позволяли увеличивать число сегментов до бесконечности путем уменьшения размера сегментов» [5]. Клайн утверждает, что нахождение длины кривых было одной из наиболее важных четырех математических проблем, которые мотивировали появление анализа.

Тезис Черча как определение эффективной вычислимости

Таким образом, выдвижение тезисов, суть которых состоит в увязывании интуитивного понятия с формальным, является важнейшей частью математической практики. Но вопрос заключается в том, можно ли считать такого рода процедуру математическим доказательством. Скорее, это введение определений, которое есть также важнейшая часть математической практики.

Поначалу Черч полагал свой тезис определением, когда в своей классической статье утверждал, что ее цель состоит в задании определения эффективной вычислимости. Той же точки зрения придерживался и Тьюринг, говоря о вычислимости чисел. Наконец, К. Гедель представил важное свидетельство в этом отношении.

Больше того, Гедель полагал, что это правильное определение: «Впервые удалось дать абсолютное определение интересной эпистемологической концепции, т.е. такое, которое на зависит от выбранного формализма. ...Для концепции вычислимости, однако, хотя это просто специальный вид демонстрируемости или разрешимости, ситуация другая. Но как результат чуда нет необходимости различать порядки, и диагональная процедура не ведет за пределы определенного так понятия» [6]. «Величайшее улучшение было, возможно, сделано через точное определение концепции конечной процедуры… Эта концепция… эквивалентна концепции “вычислимой функции целых чисел”… Наиболее удовлетворительный способ, с моей точки зрения, состоит в сведении концепции конечной процедуры к понятию машины с конечным числом частей, как это было сделано британским математиком Тьюрингом [7]; «Но меня полностью убедила только статья Тьюринга [8].

Однако есть точка зрения, суть которой состоит в том, что тезис Черча абсолютно своеобразен и имея в виду это обстоятельство, не следует искать оправдания этому тезису, апеллируя к другим случаям математической практики. Таким образом, тезису Черча присваивается статус математического утверждения sui generis. Это просто говорит о своеобразии исследований в теории рекурсивных функций, и утверждение тезиса является важным математическим открытием.

Правда, такая постановка вопроса никак не препятствует тому, чтобы использовать тезис Черча в качестве определения эффективной вычислимости.

Традиционная поддержка тезиса Черча состоит в утверждении о невозможности математического доказательства эквивалентности интуитивного понятия и точно определенного математического понятия. При этом подразумевается, что интуитивное понятие более неясно, чем математически определенное. Сопоставление этих двух категорий может проводиться на основе критериев, которые не связаны с «заслугами» того или иного понятия. Так, понятие частично рекурсивной функции, являющееся, согласно тезису, экспликацией понятия эффективного вычисления, полагается более ясным. Однако оно вряд ли вносит какую-то ясность в фундаментальное понятие эффективной процедуры. Дело, однако, в том, что частично рекурсивные функции тесно связаны с развитыми областями математики и логики и в этом смысле более «знакомы» математикам. Но искать в экспликации эпистемологические преимущества – значит вводить себя в заблуждение.

Есть еще одно обстоятельство, которое говорит в пользу чисто математической природы тезиса Черча. Ранее мы упоминали о том, что одна часть тезиса тривиальна, а именно, что все частично рекурсивные функции эффективно вычислимы. Подразумевается, что этот факт является интуитивно ясным в силу способа построения рекурсивных функций. Действительно, для таких функций просто задается способ их вычисления. Однако уже это – математический факт. Далее, операции подстановки и рекурсии ведут от эффективно вычислимых функций к эффективно вычислимым функциям, что, конечно же, представляет собой часть типично математического доказательства. Конечно, операция подстановки кажется совсем тривиальной операцией, и, тем не менее, ее применение есть результат типично математической деятельности.

Отказ от убеждения, что истинность тезиса Черча доказуема, основывается на узком понимании этой самой математической деятельности. Истинность математического утверждения часто усматривается непосредственно, исходя из совокупности факторов: правдоподобности, предыдущего опыта, некоторого рода «индукционных» ожиданий, т.е. всего того, что можно назвать феноменологией математического мышления. Тезис Черча связывает интуитивное понятие с формализованным понятием, и уже слово «формализованное» говорит о том, что формализовано некоторое предыдущее понятие. В этом смысле тезис Черча истинен в той степени, в какой мы доверяем вообще математическому мышлению. Некоторые базисные принципы такого мышления не могут быть обоснованы и фактически являются определяющими саму суть математики. Это относится, например, к принципу математической индукции.

Мендельсон так подытоживает ситуацию: «…Эквивалентности интуитивных понятий и “точных” понятий не всегда должны рассматриваться как недоказуемые тезисы. Обоснованность таких эквивалентностей иногда воспринимается прямо, иногда она есть результат комбинации прямо воспринимаемых истин и логических аргументов, а в других случаях возможно открытие и полностью убедительных доказательств» [9].

Что можно возразить против трактовки вопроса, предложенной Мендельсоном? Фактически такие возражения могли бы быть основаны на резком разделении формальных доказательств и эмпирических свидетельств в пользу некоторых утверждений. Но очень часто мы имеем в математике такие утверждения, которые не могут считаться ни чисто эмпирическими, ни чисто дедуктивными. Классическое такое утверждение, которое называют теоремой, – это утверждение, что существуют эффективно вычислимые функции, не являющиеся примитивно рекурсивными. Здесь есть как эмпирические элементы, или интуитивные элементы (эффективно вычислимая функция), так и формальные понятия (примитивно рекурсивные функции). Таким образом, это подтверждает точку зрения Мендельсона, согласно которой неформальные доказательства являются «законной» частью математического дискурса.

Но даже при таком расширительном понимании математической доказуемости тезиса Черча возникают вопросы относительно связи интуитивных понятий и их экспликаций. Некоторые из этих вопросов восходят весьма старым философским проблемам, – например, это вопрос о возможности сведения модальных понятий к утвердительным. На философском жаргоне это вопрос о сведении «можно» к «есть». Знаменитый тезис о натурализации Дж. Мура трактует проблематичность такого сведения в этике [10]. В случае тезиса Черча речь идет о том, что когда мы говорим об эффективной вычислимости, мы говорим, что некоторые вещи могут быть сделаны в принципе, т.е. включаем модальный элемент. Но понятие рекурсивной функции такого элемента не содержит. Поэтому тезис Черча отождествляет объем идеализированного прагматического и модального свойства с объемом формального, точно определенного, с первого взгляда немодального, арифметического свойства функций. Следовательно, тезис Черча есть предложение подставить модальность в качестве онтологии.

Модальности вызывают множество возражений с точки зрения как онтологии, так и эпистемологии. «Чемпионом» в такого рода возражениях является В. Куайн, который указал на парадоксальные следствия употребления модальных контекстов. Многие из этих возражений формального толка преодолены, но за счет принятия в высшей степени сомнительной онтологии вроде возможных миров. Если принять скептическую позицию Куайна по отношению к модальностям, то тезис Черча не имеет истинностного значения вообще. Если принять менее скептическую позицию в отношении модальностей, тогда есть сомнения в какой-либо полезности сведения модальных к немодальным.

Проблему модальности можно было бы обойти, если предположить, что формальная структура вычислимости, моделирующая процесс вычисления, объемлет все возможные алгоритмы, которые могли бы быть мыслимы. Тогда утверждение «может быть вычислено» сводится к простому утверждению о вычислимости. В отношении машины Тьюринга это означает, что устранение модальности состоит в том, что для каждого возможного алгоритма имеется машина Тьюринга, которая представляет алгоритм, вычисляющий интуитивно представленную функцию. То есть имеет место апелляция ко всей математической структуре, а не к отдельному алгоритму. Но это, в свою очередь, означает, что принимается структуралистская концепция математики с соответствующей онтологией [11]. То же относится и к остальным экспликациям понятия эффективно вычислимой функции.

Ясно, что подобная трактовка выходит за пределы того, что, собственно, имелось в виду под тезисом Черча. Дело в том, что фактически при устранении модальностей мы утверждаем о существовании для каждой вычислительной процедуры, понимаемой интуитивно, т.е. для каждого алгоритма, формальной модели вычисления, приводящей к тому же самому результату, что и интуитивный алгоритм. Тезис Черча говорит о том, что понятие алгоритма и понятие рекурсивной функции совпадают, но мы утверждаем уже не только о совпадении, но и о существовании, даже обязательном существовании, для каждого алгоритма, скажем, машины Тьюринга. Это более сильное утверждение было названо Дж. Крайзелем супертезисом Черча: «Свидетельства в пользу тезиса Черча, которые ссылаются на результат, на вычисленные функции, на самом деле устанавливают большее, некоторого рода супертезис: каждому алгоритму приписана программа (машина Тьюринга), превращение modulo trivial, которое может рассматриваться как определяющее такой же процесс вычисления, как и в результате выполнения алгоритма» [12].

Но структуралистские последствия кажутся вовсе не необходимыми, если иметь в виду, что модальные мотивы при экспликации понятия эффективной вычислимости не имеют строго очерченных границ, как и всякие модальные понятия. Стоит только вспомнить огромное число формальных модальных систем, которые реализуют самые различные интуиции относительно модальностей. Поэтому ясно, что экспликация модального понятия может быть достаточно произвольной, так что результирующее понятие может быть расплывчатым. Но в этом случае тезис Черча просто не имеет истинностного значения, поскольку трудно предполагать саму идею совпадения точного понятия и расплывчатого понятия. В некотором смысле тезис Черча в этом случае становится нормативным утверждением.

Согласно этой норме математической практики вместо вычислимости мы можем подставить рекурсивность в определенных целях и в определенных контекстах.

От нормативности весьма короткая дистанция до «рабочей гипотезы». Э. Пост полагал, что тезис Черча можно рассматривать как естественно-научный закон. Но это означает возведение тезиса Черча в ранг эмпирических законов, что, как уже было указано ранее, вызывает множество возражений. Нормативность часто является продуктом как раз усвоения естественно-научных законов, и простое заключение от индукции (не математической) к норме есть обычная научная практика. Но в данном случае, т.е. в случае тезиса Черча, объявлять подобную экспликацию нормой – значит делать тезис содержательно пустым.

Довольно сходная ситуация возникает в связи с понятием математической индукции. В отличие от тезиса Черча это точно определенный математический принцип. Тем не менее в качестве его обоснования обычно рассматривается некоторого рода синтетическое априорное утверждение. Это позиция Пуанкаре. В этом смысле математическая индукция, хотя и не имеет эмпирического происхождения, не есть результат какой-то нормы, заимствованной из математической практики. Другой подход к обоснованию принципа математической индукции предпринят логицистами, в частности Расселом, и состоит в том, что этот принцип считается определением натуральных чисел [13]. Сходная ситуация наблюдается в дискуссии о тезисе Черча. Его часто рассматривают как определение эффективного вычисления. Представляет интерес то обстоятельство, что сам Черч, а также Гедель и Тьюринг полагали тезис Черча именно определением. Часто цитируется довольно четкое мнение Геделя, что тезис Черча есть определение эффективной вычислимости: «Впервые был достигнут успех в нахождении абсолютного определения интересного эпистемологического понятия, т.е. не зависящего от выбранного формализма» [14].

Вряд ли можно возражать против такого подхода, если он свидетельствует в пользу тезиса. Однако если определение является номинальным, тогда тезис опять-таки пуст, поскольку представляет собой лишь некоторого рода конвенцию. Другими словами, тогда он, согласно Карнапу, есть внутренний вопрос математического практического каркаса [15]. Если определение принято, тогда тезис истинно бессодержателен, если отвергнуто, он не имеет существенного использования. Скорее речь идет о реальном определении.

Реальное определение весьма близко к тому, что называется экспликацией. По В. Куайну, экспликация есть элиминация, т.е. эксплицируемый объект заменяется на более приемлемый для эксплицирующего, вовсе не повторяющий прежний. В нем могут быть желаемые свойства, которыми не обладает исходный объект. Эффективная процедура вычисления эксплицируется рекурсивной функцией. Экспликация должна дать в интересных случаях те же результаты, что и интуитивное неточное понятие. Подтверждения реконструкции должны включать эмпирические исследования. Все эти особенности экспликации представлены в случае тезиса Черча. Естественно, что в случае экспликации она не может быть доказана.

Такая точка зрения поддерживается рядом исследователей. Так, Дж. Фолина высказывается об истинности тезиса, но также и о том, что он не может быть доказан [16]. Фолина полагает, что особенность обсуждения тезиса Черча состоит в том, что тезис говорит не о математическом объекте, а о концепции. Коль скоро речь идет не об объекте, тезис не может быть предметом математического доказательства. Другими словами, тезис есть предмет концептуального анализа. Что такое концептуальный анализ? Это открытие чего-то такого, что уже было заключено в используемых концепциях. В противоположность экзистенциальным утверждениям, в которых речь идет об объектах, концептуальный анализ утверждения не содержит новой информации, а лишь представляет собой извлечение неявного.

Между тем тезис Черча содержит, по всем представлениям, новую информацию, т.е. утверждает, что эффективно вычислимые функции являются вычислимыми по Тьюрингу. Мало того, посредством простого концептуального анализа не выявить утверждаемой в тезисе эквивалентности. Дело в том, что понятие эффективного вычисления подразумевает множество операций (выписывание на бумаге знаков, обращение к промежуточным записям при длинных вычислениях и проч.), в то время как машина Тьюринга совершает операции фиксированным образом. Конечно, машина Тьюринга в некотором смысле имитирует, или моделирует, механические действия «компутора». Но в отношении характера этого моделирования много спорного, и установление факта эквивалентности понятия эффективного вычисления и понятия машины Тьюринга никак не может считаться раскрытием концептуального содержания понятия эффективного вычисления. Само приравнивание «рабочего пространства» машины Тьюринга к аналогичному пространству эффективной процедуры вычисления, осуществляемого даже и «компутором», и может быть предметом математического доказательства.

Таким образом, если отбросить идею о том, что тезис Черча является результатом концептуального анализа, тогда недоказуемость тезиса надо как-то совместить с признанным всеми его математическим характером. Дж. Фолина предлагает рассматривать тезис как математическое утверждение, которое не подходит под классическое определение дедуктивного доказательства. При этом она неявно допускает, что есть такие математические утверждения, которые выходят за пределы дедуктивной трактовки. В этом случае требуется расширение понятия доказательства, о котором говорилось ранее.

Говоря о «математической доказуемости», следует заранее объяснить, что при этом в точности имеется в виду. На это упирал С. Шапиро, который утверждал, что в системе Цермело – Френкеля не существует доказательства тезиса и не имеется формального доказательства [17]. Для формального доказательства тезиса надо сконструировать формальную систему, в которой концепция вычислимости должна быть среди примитивных понятий, и это доказательство должно быть основано на аксиомах, характеризующих данное понятие. Задача тогда состоит в том, чтобы показать, что вычислимость, характеризуемая таким образом, совпадает с рекурсивностью. Но здесь возникает другая проблема, а именно, проблема демонстрации того, что принятые аксиомы для вычислимости на самом деле отражают в точности свойства (интуитивно понятые) вычислимости. Отсюда мы опять приходим к тезису, хотя уже на другом уровне и в другом контексте. Следует различать разные уровни в математике – дотеоретический и формальную реконструкцию, и поэтому нужно принимать во внимание различные средства обоснования.

Примечания

1. См.: *Целищев В.В.* Интуиция, финитизм и рекурсивное мышление. – Новосибирск: Параллель, 2007.

2. См.: *Mendelson E.* Second thoughts about Church Thesis and mahematical poofs / Journal of Philosophy. – 1990. – V. LXXXVII, No. 5. – P. 225–233.

3. См.: *Murawski R.* // Annales UMCS Informatica AI. – 2004. – P. 54–70.

4. См.: *Mendelson E.* Second thoughts about Church Thesis and mahematical proofs.

5. *Kline M.* Mathematical thought form ancient to modern times. – Oxford Univ. Press, 1972. – P. 354.
6. *Gödel K.* 1946. – P. 84.
7. *Gödel K.* Gibbs Lecture 1951. – P. 303–304.
8. *Gödel K.* letter to Kreisel, May 1, 1968 //
9. *Mendelson E.* Second thoughts about Church Thesis and mahematical poofs. – P. 223.
10. См.: *Мур Дж.* Принципы этики.
11. См.: *Целищев В.*В. Онтология математики. – Новосибирск: Нонпарель, 2003.
12. *Kreisel G.* Some reasons for generelizing recursion theory // Logic Colloquium ’69. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – P. 177.
13. См.: *Целищев В.В.* Интуиция, финитизм и рекурсивное мышление.
14. *Gödel K.* Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on the problems in mathematics // The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Nonsolvable Problems, and Computable Functions / Ed. by M. Davis. – N.Y.: Raven Press, 1965. – P. 84.
15. См.: *Карнап Р.* Эмпиризм, семантика, онтология // Значение и необходимость. – М., 1959.
16. См.: *Folina J.* Church Thesis: prelude to proof // Philosophia Mathematica. – 1998. – V. 6.
17. См.: *Shapiro S.* Understanding Church ‘s Thesis // Journal of Philosophical Logic 1981. – V. 10. – P. 353–365.

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск

Bessonov, A.V., A.V. Khlebalin and V.V. Tselishchev. **Whether Church’s Thesis may be proved?**

To get a formal proof of Church’s Thesis we need to build a formal system where the concept of computability must be among primitive concepts and must be based on postulates which describe this concept. Then, the task is to show that computability being described in this way coincides with recursiveness. But in this case, another problem arises: we need to show that standard postulates reflect quite the same computability properties (understanded by intuition). Hence, we come to the Thesis again, but now on another level and in another context. We should distinguish different levels in mathematics, viz pre-theoretical one and formal reconstruction. That is why we need to take into account different means of proving.