Проблемы логики и методологии науки

НЕОЛОГИЦИЗМ И ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ В ЛОГИКЕ

В.В. Целищев

Традиционное изложение проблем оснований математики не обходится без упоминания «великой троицы» – логицизма, интуиционизма и формализма. Из этих трех ведущих программ оснований математики начала XX в. самая печальная судьба постигла логицизм, который, по общему признанию, не был успешным в качестве этих оснований. Как известно, логицизм есть тезис о том, что математика сводима к логике. Система, предложенная Г. Фреге, как показал Б. Рассел, оказалась противоречивой, а система Principia Mathematica Б. Рассела и А. Уайтхеда содержала в себе помимо чисто логических аксиом и понятий также аксиомы бесконечности, сводимости и выбора. Эти три аксиомы не признаются логическими, и, стало быть, Principia Mathematica не является только логикой, а содержит внелогические части. Часто это обстоятельство находит отражение в полемике по поводу того, может ли логика второго и высшего порядков считаться собственно логикой. С некоторого времени логикой считается логика первого порядка, а математика получается на основании этой логики с добавлением теоретико-множественных аксиом. В этом смысле Principia Mathematica не есть чисто логическая система, и если в ней математические понятия сводятся к «логическим», то эти последние не могут претендовать на собственно логический статус.

В настоящее время предпочтение отдано теоретико-множественному обоснованию математики. Математика при этом подходе

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 08-03-00567а.

рассматривается как анализ аксиом и их следствий в моделях, состоящих из множеств. Сами множества описываются аксиомами Цермело – Френкеля. Следует отметить различие в статусе этих аксиом и аксиом других областей математики: у первых более «основательный» характер, имеющий самое прямое отношение к природе математических объектов и математического мышления. Так, уже Рассел говорил об особом статусе аксиомы бесконечности, которая не является логической и в то же время необходимой для математики [1].

Но говорить о том, что теоретико-множественный подход к основаниям математики более предпочтителен в силу присущих ему каких-то особых преимуществ перед другими направлениями, например в силу фундаментальной ясности упомянутых аксиом, значило бы существенно искажать подлинное положение дел. Теоретико-множественные аксиомы не являются интуитивно ясными, не являются они и более «фундаментальными» в каком-то ином смысле [2]. Предпочтение теоретико-множественному подходу отдано в силу чисто математической практики, в которой этот подход занимает важнейшее место. Есть еще одно обстоятельство, оставляющее за теоретико-множественным подходом лидирующее место: остальные подходы считаются несколько устаревшими, и особенно это относится к логицизму. Но на самом деле это не очевидно, и интересным направлением в данном отношении является развитие целого спектра взглядов, которые могут считаться возрождением логицистской программы. Таким образом, исторически приговор, который был вынесен логицизму, оказывается не совсем справедливым.

На первый взгляд, теоретико-множественная трактовка математики по духу своему близка к логицизму в том отношении, что все математические объекты сводимы к базисным. Первая попытка реабилитировать логицизм как раз и связана с такого рода близостью: теория множеств рассматривалась как часть логики. Однако упомянутое выше четкое разделение логики и теории множеств, которое стало превалировать в философии логики и математики со времен У. Куайна, сделало эту попытку несостоявшейся. Неопозитивистские подходы к данной проблеме, как и другие концепции неопозитивизма, в общественном мнении, не выдержали критику «двух догм эмпиризма».

Однако не очень ясно, что такое логика. С одной стороны, канонической логикой полагается логика первого порядка. Но пример дружественно-независимой логики Я. Хинтикки показывает, что резкая граница между логикой первого порядка и логиками высших порядков не так уж обоснованна [3]. Так что можно, видимо, менять содержание, или объем, понятия логики, которая может служить в качестве оснований математики. Очевидно, что таким изменением может быть расширение этого понятия.

Далее, самой характерной чертой математических истин в философии математики считалась их аналитичность. В значительной степени эта характеристика совпадала с концепцией априорности математических истин. И хотя ныне хорошо осознается, что эта ассоциация не совсем оправданна, тем не менее следует помнить, что уже Лейбниц полагал математические истины аналитическими и в определенном смысле логицизм есть продолжение лейбницевской традиции. Аналитические истины выходят за пределы логических истин, и расширение понятия логики путем добавления к логическим истинам аналитических может привести к тому, что математические истины будут сводимы к логическим. Вопрос состоит в том, допустимо ли такой расширенный вариант полагать собственно «логикой».

Как известно, система Фреге оказалась противоречивой из-за Основного закона V:

$$\varepsilon F = \varepsilon G \equiv \forall x\,(Fx \equiv Gx)$$

где εF есть объем свойства F. Противоречия можно избежать, если вместо Основного закона V подставить так называемый «принцип Юма». Этот принцип имеет следующий вид:

$$\#F = \#G \equiv (F \approx G)$$

В данном случае $\#F$ есть число объектов, подпадающих под предикат, а $F \approx G$ означает, что элементы множества объектов, подпадающих под предикаты F и G, находятся в одно-однозначном соответствии. Другими словами, эти предикаты равночисленны. Для такого утверждения средств первопорядковой логики недостаточно, и поэтому принцип Юма как принцип абстракции следует добавлять к логике второго порядка. С технической точки зрения присоединение принципа к остальным аксиомам логики второго порядка позволяет выводить основные принципы арифметики, не прибегая к спорному Основному закону V [4].

Что же представляет собой принцип Юма с точки зрения логики? Удовлетворяет ли он всем тем требованиям, которые необходимы для принадлежности к собственно логике? Для ответа на этот вопрос следует рассмотреть некоторые детали исходной логицистской программы Фреге.

Принцип Юма включает понятие равночисленности, которое выглядит достаточно сложным с точки зрения программы определения арифметических понятий, потому что, на первый взгляд, уже содержит в себе понятие числа. Но Фреге показал, как определить равночисленность, используя только ресурсы логики высших порядков, не предполагая при этом понятия числа. Число элементов объектов, подпадающих под предикат *F*, представляет собой сингулярный термин и, стало быть, обозначает определенный объект. «Объектность» чисел играет важную роль в этом определении. Статус объекта предполагает тождественность: знаменитый афоризм Куайна: «No entity without identity» – великолепно выражает это обстоятельство. Пусть мы имеем концепцию «*B* не тождествен самому себе». Эта концепция используется Фреге для определения нуля, поскольку для любого объекта *c* утверждение *Bc* ложно. То есть число нуль есть число концепции *B*. Определение Фреге отношения последующего элемента выглядит следующим образом.

> Число *n* следует за числом *m*, если и только если существуют концепция *F* и подпадающий под нее объект *x*, такой что число, которое принадлежит к концепции *F*, есть *n* и число, которое принадлежит к концепции «подпадающее под *F*, но не тождественное *x*», есть *m*.

Это означает, что число *n* есть последующее за числом *m*, если имеется концепция, которая приложима точно к *n* объектам, и, когда мы удаляем один из этих объектов, остается *m* объектов. Понятия «концепция», «объект» и «тождество» полагаются Фреге чисто логическими. Легко продемонстрировать то, как «становится» ряд натуральных чисел. Если *T* есть концепция «тождествен 0», тогда для любого объекта с утверждение *Tc* справедливо, если и только если $c = 0$. То есть *T* справедливо только для одной вещи, а именно, для числа 0. Фреге определил число 1 как число концепции *T*. Очевидно, что число 1 является следующим за числом 0. Число 2 определяется как число концепции «тождествен либо нулю, либо единице». Общее определение имеет следующий вид.

> Для любой концепции F, если F справедливо для числа 0 и если для каждого объекта d из утверждения, что d подпадает под F, следует, что каждый последующий элемент по отношению к d подпадает под F, тогда n подпадает под F.

Ряд исследователей настаивают на том, что на этом пути можно избежать проблем, связанных с традиционным логицизмом. Больше того, при этом утверждается целая программа философии логики и математики, которая включает в себя несколько относительно независимых доктрин. Во-первых, это неофрегеанство, суть которого состоит в формировании общей концепции соотношения языка и реальности. Во-вторых, это метод абстракции, суть которого состоит во введении концепций в язык. Наконец, в-третьих, это полагание подлинной логикой не логики первого порядка, а логики второго и высших порядков.

Выведение арифметики из принципа Юма называется теоремой Фреге. Логицизм часто упрекают в том, что чисто математические интересы в нем отходят на задний план по сравнению с философскими. Но признавая, что в проблемах, связанных с пониманием природы натуральных чисел, философия должна занимать немалое место, следует заметить, что такое выведение представляет собой немалое же и математическое достижение. Так вот теорема Фреге имеет, с точки зрения неологицистов, то преимущество, что поддерживает именно философское обоснование понимания натуральных чисел. Философское обоснование состоит прежде всего в принятии полнокровного платонизма, согласно которому числа существуют вне и независимо от человеческого сознания. Для логицизма было важно то обстоятельство, что платонизм подобного рода должен был найти свое выражение в логической форме. С этой точки зрения рассмотрим принцип Юма

$$\#F = \#G \equiv F \approx G$$

Правая сторона эквивалентности задает истинностные условия левой стороны. Но левая сторона относительно независима, потому что выражение «$\#F$ есть число объектов, подпадающих под предикат» представляет собой сингулярный термин, а согласно формализованной семантике такой термин должен обозначать объект. Тогда вопрос о существовании объектов определяется тем, есть ли истинные примеры правой части. Если они есть, тогда платонизм получает свое подтверждение.

Соответствующая аргументация относительно правой части такова. Если мы найдем такие примеры $F \approx G$, которые были бы истинны только на логических основаниях, тогда логические основания математики будут более приемлемыми. Для этого надо привести примеры таких свойств. Скажем, свойство «не тождествен самому себе» равночисленно свойству «не тождествен самому себе». В этом случае из принципа Юма следует, что число несамотождественных вещей идентично числу несамотождественных вещей. Естественным было бы обозначить такое число через 0, которое есть число несамотождественных вещей. Значит, $0 = 0$. Из этого факта, в свою очередь, следует, что 0 существует.

При получении 0 можно определить 1 как число концепции «тождествен 0». Число 2 определяется как число концепции «тождествен либо 0, либо 1» и т.д. Из принципа Юма следует, что все эти получаемые натуральные числа отличны друг от друга, а стало быть, и область применимости принципа Юма не может быть конечной.

Механика получения чисел, коль скоро мы имеем 0, хорошо понята и известна. Между тем самым «сомнительным» в данном предприятии является как раз получение этого самого 0. Н. Теннант, которого можно спокойно зачислить в неологицисты, говорит, что в этом вопросе все упирается в метафизические посылки о существовании нуля. Эти метафизические посылки, поскольку речь идет об основаниях математики, должны быть эксплицированы в некоторой формальной системе. В этом отношении интерес представляет экспликация Теннанта [5]. Понятийным аппаратом для экспликации служит язык, содержащий константу 0, функцию последующего знака в последовательности знаков s и термин-образующий оператор $\#xFx$ (интуитивное значение его – число Fs). Формальная система объемлет три относительно простых принципа:

1) принцип относительно нуля:

Если не имеется Fs, тогда $\#xFx = 0$;

2) принцип «храповика»:

Если $\#xFx$ существует и имеется точно на один Gs больше, чем Fs, тогда $\#xFx$ существует;

3) принцип последовательности:

Если $t = \#xFx$ и имеется точно на один Gs больше, чем Fs, тогда $\# xGx = s(t)$.

Эти три принципа важны в том отношении, что из них можно вывести все аксиомы Пеано, включая схему индукции. Если учесть, что все три принципа имеют если не логический, то аналитический характер, тогда станет ясной важность такой формальной системы для логицизма.

Отметим, что метафизика тут представляет наибольшую важность. Дело в том, что два последних принципа суть условные утверждения, посылками которых являются экзистенциальные утверждения. Это значит, что ничего существенного по поводу прояснения онтологического статуса натуральных чисел они сообщить не могут. Таким образом, основная тяжесть экспликации метафизики чисел падает на первый принцип – принцип существования нуля. Н. Теннант подправляет самого Л. Кронекера с его знаменитым афоризмом «Бог создал целые числа, все остальное – творение человека»: «Кронекер был неправ! Неверно, что Бог создал целые числа, а все остальное – творение рук человеческих. Бог должен был дать нам только 0. Мы имеем аналитические принципы “храповика” и последовательности и, тем самым, имеем возможность породить концепцию натуральных чисел. Человек сделает все остальное» [6].

Это все остальное есть, конечно же, натуральные числа и далее вся последовательность конструируемых чисел, целых положительных и отрицательных, рациональных, действительных и комплексных. Признание существования таких чисел в сильнейшей степени опирается на признание существования натуральных чисел. В этом вопросе мы можем выделить следующие уровни экзистенциальных тезисов.

Первый уровень – это утверждения о существовании натуральных чисел в рамках теории чисел. Это, если прибегнуть к терминологии Р. Карнапа, есть внутренний вопрос, коль скоро принимается теория чисел. Если в рамках формализованной версии, основанной на некотором достаточно богатом логическом языке, мы имеем истинное утверждение (Ex) $(x = N)$, тогда число N существует. Это известный критерий существования, предложенный Куайном: «быть – значит быть значением связанной переменной». При принятии внешнего каркаса (по Карнапу) критерий становится просто тривиальным.

Второй уровень – это известный аргумент о незаменимости математики. Но здесь аргументация выходит за пределы философии математики, в основном апеллируя к научной практике. «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» – фраза, запущенная в оборот Э. Вигнером, как нельзя лучше характеризует суть этого аргумента. Числа существуют уже потому, что описание законов природы невозможно без использования математики. Соображения в пользу и против тезиса суммированы в работе М. Коливана [7].

По-настоящему интерес представляют утверждения, которые предполагают существование чисел в фоновой семантике интерпретированного языка. Такая семантика реализуется в грамматической форме утверждений о счете. Термины-цифры указывают на объекты, которые должны существовать, поскольку речь идет-таки о денотационной семантике, или же о стандартной семантике в стиле Тарского. Таким образом, обоснование концепции числа должно включать возможность счета, т.е. соотнесение абстрактных цифр и физических предметов. Это требование Б. Рассел, вслед за Г. Фреге, полагал одним из самых существенных при обосновании концепции числа. Именно здесь употребление абстрактных объектов смешивается с разговором о физических объектах.

Здесь в дополнение к метафизике полезно принять некоторого рода антиметафизический принцип, а именно, тезис Витгенштейна о том, что значение есть употребление. Если принять витгенштейновский тезис, то нам следует искать такие принципы, которые управляют подобного рода употреблением абстрактных объектов применительно к физическим объектам. Ясно, что употребление таких терминов должно контролироваться какими-то принципами, являющимися производными от структуры семантики (и значит, грамматики математического дискурса) и структуры физического мира. Такие принципы имеют скорее концептуальный характер, поскольку речь идет о принципе употребления абстрактных терминов.

Н. Теннант предлагает в качестве средства «концептуального контроля» над такого рода употреблением чисел, а стало быть, контроля над значением терминов для абстрактных объектов так называемую схему С:

> (С) Имеется точно n объектов со свойством Fs, если и только если $Fs = n\_$ (где s – прилагательное, а $n\_$ – существительное).

В качестве примера этой схемы можно привести утверждение «В этой корзине есть два яблока, если и только если число яблок в этой корзине равно 2». Таким образом, как и у Фреге, у Теннанта анализ понятия числа опирается на грамматический анализ числовых терминов. Используя обыденный дискурс с абстрактными объектами типа чисел, мы пытаемся извлечь некоторую мораль из практики употребления термина. Если мы признаем, что выражение $Fs = n\_$ имеет истинностное значение, которое вполне понятно с точки зрения обыденной языковой практики, то мы должны признать, что это возможно только за счет приписывания конкретного числа концепции F. Правомерность подобной языковой практики несомненна, так как установление тождества есть одна из наиболее фундаментальных операций. При этом, конечно же, числа допускаются в качестве существующих.

Для более полного понимания этой дилеммы рассмотрим принцип Юма в такой форме, в которой учитываются грамматические различения числовых терминов:

> (HP) Число Fs тождественно числу Gs, если и только если имеется столько же Fs, сколько и Gs.

Далее,

> Число Fs тождественно числу Gs.

Отсюда следует вывод:

> Число Fs существует.

Логицизм тут имеет явный выигрыш, поскольку посылкой этого вывода является аналитическая истина.

Схема (С) и принцип (HP) в значительной степени пересекаются. Тогда возникает вопрос о том, зачем нужно введение схемы (С), если (HP) является достаточно респектабельным принципом, управляющим числами. А дело в том, что принцип Юма не дает желательного результата, что если нет *Fs*, тогда число *Fs* равно 0 и именно по этой причине надо обратиться к схеме (С). В пользу такого решения говорит следующий пассаж из работы М. Даммита: «Суть числа 3 – это не позиция в некоторой прогрессии, и даже не в конкретной прогрессии, и не то, что оно есть результат прибавления 3 к другому числу, но нечто более фундаментальное, – это тот факт, что если определенные объекты считаются как "один, два, три" или же как-то вроде "Ноут, один, два", тогда имеются три объекта. Эта точка зрения столь проста, что требуется утонченный интеллект, чтобы проглядеть ее. И это показывает, что Фреге в споре с Дедекиндом был прав, сделав использование натуральных чисел как конечных кардиналов внутренне присущей им характеристикой… и это представляет не какую-то деталь, а фундаментальный принцип его философии арифметики» [8].

Но при этом остается одно психологическое препятствие для принятия такой точки зрения: многие исследователи говорят о «чистой» математике, где нет необходимости вводить для обоснования математических концепций понятия счета. Правда, надо понять, каким же образом осуществляется концептуальный контроль над числами.

Такой контроль осуществляется с помощью правил, которые апеллируют к чувственному восприятию без непременной апелляции к понятию множества. Действительно, наш повседневный язык, используемый для разговора о конкретных вещах, может быть распространен на разговор о числе *Fs*, для некоторого предиката *F* нашего языка. Концептуальный контроль может осуществляться над новыми числовыми выражениями таким образом, что говорящий о конкретных объектах фактически говорит о числах конкретных объектов и таких-то и таких-то свойствах. Ранее мы видели, что для получения натурального ряда требуется лишь 0. С точки зрения неологицизма требуется, чтобы 0 был чисто логическим объектом.

Но для этого нужны некоторые постулаты значения для такой концепции. Более точно, нам нужны правила введения этой концепции, которые регулировали бы ее употребление. При этом значение термина «0» будет полностью определяться его употреблением в полном соответствии с тезисом позднего Витгенштейна. Напомним, что выше мы уже определили концепцию нуля, которая в формальном выражении выглядит так:

$$0 \equiv \#x\,(\neg\, x = x).$$

Итак, 0 есть число пустой концепции. Если для любого a мы имеем опровержение утверждения Fa, что означает отсутствие Fs, т.е. отсутствие объектов со свойством F, тогда 0 есть число концепции F. Это не есть постулирование абстрактного объекта «0», а есть введение его согласно некоторому правилу. Такое правило аналогично генценовским правилам введения и удаления символов.

Рассмотрим в качестве примера такое правило:

$$\dfrac{\dfrac{Fa \qquad E!a}{\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \bot\end{matrix}}}{0 = \#\,\mathrm{x}\,(\neg\, x = x)}$$

Логицизм обычно упрекают в том, что логика показывает существование объектов, а это не входит в ее «компетенцию». Более того, такое существование, коль скоро оно касается платонистских объектов, является необходимым существованием. Но тут мы должны обратиться к такой концепции аналитичности, которая опровергает догму, что аналитическое утверждение не включает онтологических допущений. Аналитически истинно, что $0 = \#\,x\,(\neg\, x = x)$, а это, в свою очередь, влечет, что 0 существует.

Что означает аналитичность экзистенциальных утверждений? Такое сочетание терминов может показаться противоречивым, если согласиться с общепринятым взглядом на природу логики. Неологицизм есть представление, что можно получить знание об абстрактных объектах (в нашем случае – о натуральных числах) путем размышления над логическими и лингвистическими истинами. Связь с традиционным логицизмом заключается в ассоциации с утверждением Фреге об априорности арифметических истин. Именно это положено в основу представления, что утверждения о существовании натуральных чисел являются необходимыми. Отход от классического взгляда на логику как лишенную экзистенциальных утверждений у неологицистов основывается на стратегии «приручения» логики [9]. Такое приручение дает желаемый результат: «Утверждение, в котором содержится экзистенциальное допущение, не влечет его синтетичности… Если использование определенных выражений языка ведет к признанию существования некоторых сущностей, существующих необходимо, при этом не совершается выход за пределы значений выражений, которым обязаны экзистенциальные допущения. Если мы знаем, что сущность E существует необходимо и что функцией выражения “E” является указание на эту сущность, тогда утверждение “E существует” будет истинным исключительно благодаря своему значению и, таким образом, будет аналитично» [10].

Следует указать на то обстоятельство, что приручение логики оказывается неполным. Коль скоро мы в выводе о необходимом существовании натуральных чисел опираемся на тезис о том, что логические термины могут быть введены и устранены соответствующими правилами и, как следствие этого, значение их согласно этим правилам будет определено однозначно, мы получаем заключение об аналитическом характере экзистенциальных утверждений. Эта точка зрения полностью совпадает с доктриной антиреализма М. Даммита. Однако между доктриной Даммита и собственно логицизмом есть расхождения, которые не позволяют признать одну из версий неологицизма «законным» продолжением логицизма. На одно из таких расхождений указал С. Шапиро [11].

Предположим, что предикат N, термины 0 и S, характеризующие натуральные числа, являются логическими терминами. Тогда согласно доктрине Даммита есть правила введения и устранения этих терминов, полностью определяющие их значение. Из этих правил, а также из правил для отрицания и тождества следует, что $0 \neq S0$ (подразумеваемая интерпретация S – последующий элемент). Это утверждение должно быть одной из основных истин арифметики, будучи аналитической и логической истиной.

Неологицисты предполагают, что натуральные числа являются в формальной арифметике индивидами самого низкого уровня, так что переменные квантификации принадлежат к первому порядку. В этом случае по правилу экзистенциального обобщения из $0 \neq S0$ получаем утверждение $\exists x \exists y (x \neq y)$. Это утверждение, будучи следствием аналитического утверждения, само является аналитическим утверждением. Но тогда должно существовать доказательство утверждения $\exists x \exists y (x \neq y)$, и каждая строчка его должна содержать подформулу утверждения. Однако такое доказательство из одних лишь логических правил получить невозможно, поскольку существуют такие модели, в которых $\exists x \exists y (x \neq y)$ ложно. Это, например, структуры, удовлетворяющие соответствующим правилам введения и устранения, но имеющие только один элемент. Правда, можно заметить, что такие вырожденные случаи, как модель с одним элементом, не представляют собой того употребления, которое имеется в виду при разработке программы неологицизма.

Примечания

1. См.: *Рассел Б.* Введение в математическую философию. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007.
2. См.: *Целищев В.В.* Философия математики. – Новосибирск: Нонпарель, 2002.
3. См.: *Hintikka J.* The principles of mathematics revisited. – Oxford Univ. Press, 1999.
4. См.: *Heck R.* On the consistency of second-order contextual definitions // Nous. – 1992. – V. 26. – P. 491–494.
5. См.: *Tennant N.* On necessary existence of numbers // Nous. – 1997. – V. – P. 307–336.
6. Ibid. – P. 320.
7. См.: *Colyvan M.* The indespensability of mathematics. – Oxford Univ. Press, 2001.
8. *Dummett M.* Frege: Philosophy of mathematics. – Duckworth, 1991. – P. 53.
9. См.: *Tennant N.* The taming of the true. – Oxford Univ. Press, 1997.
10. Ibid. – P. 303–304.
11. См.: *Shapiro S.* Induction and indefinite extensibility: The Godel sentence is true, but did someone change the subject? // Mind. – 1998. – V. 107, No. 427. – P. 597–624.

Институт философии и права
СО РАН, Новосибирск

Tselishchev, V.V. Neologism and existential assumptions in logic

«Taming» of logic proved to be incomplete. So far as our inference about existence of natural numbers relies on the thesis that logic terms may be introduced and eliminated by relevant rules and therefore their meaning is defined uniquely according these rules, we get a conclusion about analytical nature of existential statements.