Проблемы логики и методологии науки

УБЕДИТЕЛЬНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ МЫШЛЕНИЯ*

В.В. Целищев

«Схватывание» идеи доказательства

Это ныне почти тривиальное обстоятельство обусловлено в значительной степени историческими причинами. Первым по-настоящему интересным экскурсом в природу доказательства является диалог «Менон», где Сократ демонстрирует этот метод мышления [1]. Геометрия у Платона в ранних диалогах, которые считаются наиболее сократическими, несмотря на знаменитую фразу о недопущении в Академию не знающих геометрии, занимает подчиненное место по сравнению с этикой. Понятие добродетели у Платона напрямую связано с приобретением знания. Знание же это получается через воспоминание о том, что человек знал в своем прежнем существовании. Знание геометрических фактов получается путем чистого размышления над такими фактами, которые сродни фактам этическим, не требующим для своего осмысления эмпирических процедур.

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Российским гуманитарным научным фондом (грант № 04-03-00337) и Междисциплинарным интеграционным проектом Сибирского отделения РАН n. 1 – «Вычислимость и рациональность: исследование сферы применимости тезиса Черча – Тьюринга и понятия эффективного вычисления к проблеме соотношения дедуктивного и эмпирического способов познания когнитивных и физических процессов».

Метод приобретения знания путем вопросов и ответов называется диалектикой, и именно этот метод использовался платоновским Сократом. Но этот метод непригоден для эмпирических исследований. Наверное? уже здесь заложено различие между статусом математического знания и статусом знания эмпирического. «Диалектический метод, – пишет Б. Рассел, – годится для одних вопросов и не годится для других. Вероятно, этот метод определял характер исследований Платона, которые большей частью были таковыми, что с ними можно было обращаться именно таким образом. В результате влияния Платона почти вся последующая философия была связана с ограничениями, вытекавшими из его метода. Некоторые вопросы явно не годятся, чтобы с ними обращались таким образом, например, эмпирическая наука… Сократ в произведениях Платона всегда претендует на то, что он лишь выявляет знание, которым уже обладает человек, которого он подвергает испытанию. На этом основании он сравнивает себя с акушеркой…» [2].

При обсуждении априорного характера математического доказательства наиболее часто цитируется уже упомянутый диалог Платона «Менон». В диалоге Сократ ведет разговор с юношей-рабом, вынуждая того «вспоминать» то, чего он, по нынешним эпистемологическим стандартам, знать не мог. То обстоятельство, что Платон этим примером хотел подтвердить свою теорию бессмертия души и говорил о «припоминании виденного в потусторонней жизни», здесь несущественно. Важно то, что при этом раскрывается суть того, что, собственно, представляет собой математическое доказательство. Прежде всего, собеседнику при диалектической беседе не подсказываются никакие сведения эмпирического толка, и, таким образом, догадки юноши обладают характеристикой, которая впоследствии позволит назвать такое знание априорным.

Речь в диалоге идет о конструировании квадрата, площадь которого будет вдвое превышать площадь заданного квадрата путем увеличения стороны последнего. Юноше не сообщаются сведения эмпирического характера, которые могли бы пролить свет на решение задачи, и поэтому он высказывает ошибочные догадки. Рассмотрим ход решения этой задачи, как он представлен у Платона.

Итак, задан квадрат. Сначала в ход идет первая догадка – увеличить сторону квадрата вдвое. При этом площадь получаемого квадрата вчетверо превосходит площадь исходного квадрата. Вторая догадка состоит в том, чтобы увеличить сторону исходного квадрата в полтора раза. Опять-таки можно убедиться, что площадь квадрата не совпадает с ожидаемой. После двух этих попыток собеседники приходят к подлинному решению, которое состоит в том, чтобы построить квадрат на диагонали исходного квадрата. Юноша-раб находит этот аргумент убедительным, и, что более важно, данный аргумент признают таковым и все присутствующие при этом.

Почему мы (вместе с участниками и свидетелями беседы) принимаем заключение аргумента Сократа? Дело в том, что ход самого доказательства позволяет принять результат. Другими словами, свидетельством в пользу заключения является умственное построение, не отягощенное эмпирическими процедурами. Я. Хакинг полагает, что именно постижение доказательства является причиной того, что аргумент становится убедительным. Он приводит в качестве примера вымышленный диалог, в котором нет такого постижения [3]:

«*Сократ*: Сколько лет назад Перикл произнес вою знаменитую речь на похоронах?

Юноша: Думаю, что сто лет назад.

Сократ: Нет, серьезно, сколько лет?

Юноша: Сорок?

Сократ: Подумай лучше. Разве твоя мать не рассказывала тебе об этой речи?

Юноша: Часто рассказывала. Она присутствовала при этом, против всех правил, со своей хозяйкой, несмотря на то что была еще ребенком.

Сократ: И сколько же ей было тогда лет?

Юноша: Десять.

Сократ: А тебе сколько сейчас?

Юноша: О, я уже мужчина, мне пятнадцать лет.

Сократ: Ты самый старший из сыновей твоей матери?

Юноша: Да, но у меня есть старшая сестра.

Сократ: Была ли твоя мать пожилой, когда родила тебя?

Юноша: Нет, ей было двадцать лет – так она говорила мне.

Сократ: Так сколько же лет назад Перикл произнес речь?

Юноша: Я вижу, куда ты клонишь. Она слушала его речь за десять лет до моего рождения. Так что Перикл произнес свою знаменитую речь ровно двадцать пять лет тому назад».

В этой вымышленной беседе юноша узнает, когда состоялась беседа, но не то, почему она состоялась двадцать пять лет назад. Его знание имеет эмпирическую природу, будучи зависимым от фактов: так, мать юноши могла солгать ему о своем возрасте в то время, когда она его родила. Следовательно, знание юноши не является априорным. Между тем по форме своей вымышленная беседа Сократа с юношей вполне адекватна для извлечения знания с помощью диалектического метода. Подлинная беседа отличается тем, что в ней доказывается специальный случай теоремы Пифагора. Таким образом, суть подлинного диалога состоит в демонстрации не теории неявного знания, а в понимании природы математического доказательства.

Доказательству можно следовать двояко. С одной стороны, мы можем строго следить за переходом от одного утверждения к другому, полагая этот переход вполне законным по некоторым критериям. Если посылки аргумента истинны, истинной будет и сама теорема. С другой стороны, мы должны понять не только то, что теорема истинна, но и то, почему она истинна. Это означает, что ход доказательства теоремы должен быть предметом обозрения, иногда неоднократного, и как раз такое возвращение является существенной частью постижения доказательства. Именно это имел в виду Декарт в своей концепции доказательства.

Доказательство само по себе отходит от фактов реального мира, что и давало Платону основания говорить о воспоминаниях души. В самом деле, в «Меноне» речь идет о задаче удвоения площади квадрата. Перед глазами мы имеем нарисованный квадрат. Попытки «нарастить» его стороны не проходят. И решением является квадрат, построенный на диагонали исходного квадрата. При этом новый квадрат развернут на 45 градусов по отношению к исходному. Если это обстоятельство доставляет некоторые неудобства, легко понять, что мы можем повторить тот же аргумент с новым квадратом, стороны которого параллельны соответствующим сторонам исходного квадрата. То же относится к размеру квадрата, углам и проч. Эмпирические погрешности рисунков не имеют значения, поскольку мы имеем дело с абстрактным размышлением. Мы знаем, что новый квадрат будет ответом на вопрос, не прибегая при этом к измерению площадей обоих квадратов. Но в идее доказательства содержится не просто то обстоятельство, что знание является априорным. Даже если мы произвели измерение площадей обоих квадратов и обнаружили, что их соотношение не удовлетворяет отношению 2:1, мы готовы утверждать, что измерения произведены неверно. Соотношение должно быть именно 2:1 с необходимостью, которая присуща математическим утверждениям.

Понимание без доказательства

На вопрос, который часто задается в отношении того, почему доказательство убеждает, можно ответить радикально: для убеждения в истинности некоторых математических утверждений доказательства вообще не требуется.

Здесь речь может идти о двух вещах. Во-первых, доказательство должно быть психологически убедительным, но сама по себе убедительность может быть столь доминирующей, что на ее фоне остальные составляющие доказательства потеряют силу. Таким образом, на первый план выходит психология, а не математическая необходимость. Во-вторых, понимание значения математических утверждений может происходить совсем иным путем, нежели доказательство. В частности, речь идет о метафорах, которые сопровождают нас не только в естественном языке, но и в математике. Здесь можно говорить о метафорах, которые рождаются на основании опыта обращения с совокупностями материальных предметов.

В данном контексте следует прояснить два вопроса. Это – роль метафоры в языке и проблема расширения математических операций на новые объекты. Что касается метафор, то здесь имеется широчайший спектр мнений об их природе и функциях. Мы можем остановиться на весьма распространенной точке зрения, согласно которой все абстрактное мышление основано на метафорах. Если иметь в виду столь же распространенное мнение о том, что абстракции глубже проникают в природу реальности, то следует согласиться с афоризмом Д. Солове: метафоры не только не искажают реальности, но и составляют ее [4]. Применение этой максимы к математике возможно следующим образом: числа, не являющиеся натуральными, и операции над ними представляют собой абстракции и, будучи таковыми, являются результатом применения метафор.

Какого рода метафоры могут иметься в виду при переходе от натуральных чисел и операций над ними к другим числам и операциям уже над ними? Можно предположить, что все начинается с четырех базисных метафор, которые основаны на самом раннем нашем оперировании небольшими совокупностями:

- сложение и вычитание материальных объектов (манипулирование с камешками);
- конструирование большего целого из небольших объектов (манипулирование блоками);
- измерение ширины или высоты (простирание рук до конца объекта или сопоставление со своим ростом);
- перемещение из одного места в другое (ползком или шагом).

Как этот опыт приводит к метафорическому переходу к абстрактным концепциям? Можно предположить, что измерение обеспечивает нас концепцией нуля, а движение – концепцией отрицательных чисел. Соединение этих двух метафор дает понятие нуля и отрицательных чисел для совокупностей объектов. Приумножение метафор, основанных на базисных метафорах, приводит к новым математическим понятиям, среди которых можно указать «пустое множество» и другие «продвинутые» теоретико-множественные понятия. Такого рода подход к пониманию математических концепций ничем не хуже понимания «пустого множества» как некоторого рода идеализированного объекта, основанного на опытном ощущении «ничто» [5].

Метафорическое мышление радикально отличается от рационального в том, что оно не опирается на ясные и точные основания, и в этом смысле оно не включает в себя идеи доказательства. Понимание математического утверждения состоит в метафорическом расширении известных математических понятий на пока еще неизвестные. Логики при обсуждении подобного рода вопросов говорят о консервативном или неконсервативном расширении, делая упор на важности понятия доказательства: расширение системы (понятий) консервативно, если то, что можно доказать в расширенной системе (понятий), можно доказать в исходной системе. При метафорическом же подходе мы можем понять математическое утверждение и без доказательства. Рассмотрим подобный метод объяснения математических истин на примере, быть может, самого знаменитого математического утверждения, а именно, формулы Эйлера

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Это утверждение доказывается достаточно просто, но понимание его встречается с различного рода препятствиями начиная с эстетического и кончая предельной его общностью. В самом деле, в одно утверждение входят наиболее известные математические «константы» (если провести аналогию с физическими константами), а именно, 0, 1, i, π, e. Б. Пирс превосходно выразил противоречие между пониманием и доказательством математического утверждения, обсуждая именно эту формулу: «Джентльмены, воистину эта формула абсолютно парадоксальна. Мы не можем понять ее, и мы не знаем, что она значит. Но мы доказали ее и, следовательно, знаем, что она должна быть истинна» [6]. Но метафорический подход предлагает в некотором смысле обратное мнение, а именно, понимание без доказательства. Здесь мы имеем в качестве неизвестного (по сравнению с исходными, или базисными, метафорами) как объекты (i, π), так и операции (возведение в степень).

Метафорический перенос начинается с квазиэмпирической процедуры. Мы вполне понимаем, что такое возведение в степень в случае целых чисел, поскольку это есть попросту умножение на самого себя возводимого в степень числа столько раз, сколько представлено числом степени. Для того чтобы возвести в дробную степень, мы предполагаем, что результат должен быть между целыми показателями степени. Скажем, $2^{2,5}$ должно быть между 2^2 и 2^3, т.е. между 4 и 8. Такая эмпирическая оценка, должным образом подкрепленная алгоритмом получения все более точного результата, позволяет перейти к пониманию более сложной операции – возведения в дробную степень уже дроби.

Метафоры при таком процессе пока достаточно просты. В частности, мы должны принять во внимание наше «видение» чисел. Числовая ось является обычным таким представлением. Рациональные числа или дроби вполне укладываются в такое видение. Даже иррациональные числа могут рассматриваться как результат перемещения вдоль цифровой оси. Но вот комплексные числа не могут быть «достигнуты» на числовой оси. Так что, для того чтобы достигнуть их, нам нужно «свернуть» с этой оси. Понятие поворота опять-таки является метафорой, которая может быть развита в точное понятие. Важное обстоятельство здесь – это совместимость метафор подобного рода с уже известными представлениями. Скажем, известно, что π является отношением длины окружности к ее диаметру. Эмпирический это факт или же факт математического анализа, здесь несущественно. Нам просто это известно. Из этого факта можно выйти на новую метафору, призванную понять произведение $\pi\, i$ как перемещение, но уже не по числовой оси, а по окружности. Из понимания π можно сделать вывод, что $\pi\, i$ есть полуповорот вокруг оси, и, таким образом, мы полагаем в своем «метафорическом пространстве» $\bar{i}$ индикатором поворота.

До сих пор возведение в степень понималось в рамках метафоры числовой оси. Если же мы переходим к возведению в степень, где показатель степени есть результат поворота, мы расширяем метафору, и важно, чтобы такое расширение было совместимым с прежними метафорами. Опять-таки путем эмпирической оценки вычислений мы можем понять, что $e^{i\pi}$ будет равно 1, но благодаря i мы оказываемся на числовой оси, только уже на ее минусовой части. И если мы к этому результату прибавим 1, то получим 0. Какова же мораль из этой полуфантастической метафорической картины понимания уравнения Эйлера?

Естественно, во многом возможность применения подобных метафор зависит от возможности эмпирических оценок. Далее мы покажем, что физики с своем понимании природы математики идут по этому пути без особых ограничений. Более тонким моментом в применении метафор являются понятия «поворота», «свертывания с оси» и проч. Суть этого, в определенной степени крайнего в своей примитивности, подхода такова: «Ключ к пониманию (но не ключ к математическому доказательству, а это две различные вещи) заключается в том, что математика развивается путем совместимого расширения фундаментального опыта вроде перемещения. Каждое расширение совместимо с тем, что сделано до этого, но оно приводит к новым понятиям. Математика трудна, потому что большинство людей не видят метафор, которые придают значение математическим операциям и символам. Все, что делают люди, – это изучение доказательств, которые, будучи лишены смысла, утомляют» [7].

Несмотря на крайнюю странность, если не сказать больше, представленной картины, то, как потребители математики представляют себе расширение математических объектов и операций, весьма интересно. Ниже мы представим некоторые высказывания физика Р. Фейнмана, которые весьма характерны для тех, кто полагает роль доказательств в математике не очень существенной.

С дидактической точки зрения введение новых чисел вызывается необходимостью решения алгебраических уравнений. Если даны натуральные числа и определены операции сложения, умножения и возведения в степень, а также обратные по отношению к ним операции –

вычитание, деление, извлечение корня и взятие логарифма (например, такие операции, как $(ab)^c = a^{(bc)}$), то возникает вопрос: нельзя ли расширить класс объектов, которые по-прежнему будут обозначаться буквами a, b, c и для которых по-прежнему будут верны все сформулированные нами правила?

Последовательное решение алгебраических уравнений заставляет вводить новые объекты: отрицательные, рациональные, действительные и комплексные числа. При этом у изучающих математику возникает вопрос, как далеко будет идти такое расширение области математических объектов. Известный результат говорит, что комплексных чисел вполне достаточно. Как замечает Р. Фейнман, «кроме действительных чисел достаточно изобрести только одно число – квадратный корень из –1, после этого можно решить любое алгебраическое уравнение! Эту удивительную вещь должны доказывать уже математики» [8]. Но далее Фейнман утверждает почти то же самое, что описано выше. А именно: «Доказательство очень красиво, очень интересно, но далеко *не самоочевидно*» (курсив мой. – *В.Ц.*) [9].

На протяжении целой главы своего известного учебника Фейнман дает эмпирическое обоснование вычислений с иррациональными и комплексными числами, в частности рецепт того, как возводить такие числа в степень. Именно это требуется для понимания формулы Эйлера, и, как видно, математическое доказательство не слишком ценится Фейнманом, поскольку оно не дает понимания, не будучи самоочевидным.

Осмысленность доказательства

Доказательство есть часть математической практики, и может быть, ее наиболее существенная часть. Математический дискурс есть часть рационального дискурса, и быть может, также его наиболее существенная часть. Рациональный дискурс по определению есть нечто, что взывает к пониманию, а понимание возможно тогда, когда дискурс осмыслен. Между тем понятие доказательства в формальных системах апеллирует к чисто механическим процедурам, где не требуется осмысленности. Таким образом, налицо конфликт, в той или иной степени характерный для любых разговоров о доказательстве.

Однако даже механическая деятельность при математическом доказательстве требует понимания сути основных производимых при этом операций. В этом смысле математическое доказательство есть рациональная деятельность, правда особого рода. Д. Тимошко сравнивает ее с пониманием говорящего на иностранном языке. В этом отношении много дискуссий посвящено холистической трактовке интерпретации утверждений на иностранном языке, согласно которой интерпретация определяется не столько значением входящих в утверждение терминов, сколько схемой перевода. Важность этой схемы состоит в том, что, согласно В. Куайну, буквальный, т.е. однозначный, перевод терминов с одного языка на другой невозможен. Больше того, различные схемы перевода ведут к альтернативным пониманиям исходного термина. Это знаменитый тезис Куайна о невозможности радикального перевода. Схема перевода есть способ организации вещей в мире, а таких способов может быть много. При рассмотрении математических утверждений мы можем апеллировать к такой же холистической трактовке, полагая, что доказательство есть способ организации нашего понимания математического аргумента. Поскольку смысл дискурса состоит в организации вещей, доказательство выполняет эту роль в математике. Но тогда само понятие доказательства «выпадает» за пределы собственно математики.

Действительно, доказательство апеллирует к рациональному субъекту, готовому принять определенные нормы мышления. Доказательство есть аргумент, правильность которого коренится в единообразной оценке членами математического сообщества. В этом отношении понятие доказательства является нормативным. «Доказательство в обычном смысле (в человеческом смысле), – пишет Х. Патнэм, – есть доказательство в системе, которая не просто обоснована, но которую математики могли бы при здравом размышлении видеть обоснованной, такой, в которой разумный математик мог бы быть оправданным при принятии. Доказательство есть эпистемическое понятие, а не математическое» [10].

Этот тезис Патнэм, разделяемый многими исследователями, ставит сложные вопросы относительно алгоритмической природы формального доказательства. Ведь если существует формальное доказательство, которое признано как нечто такое, что схватывает интуитивное доказательство, постигаемое умом, тогда это формальное доказательство должно представлять собой цепь утверждений, переход между которыми осуществляется «механически». Между тем такие механические операции вряд ли обладают какими-то эпистемическими достоинствами. Из этого затруднения есть два выхода. В-первых, мы можем признать, что доказательство есть все-таки чисто математический феномен, оставляя в стороне все нормативные особенности этого понятия. Во-вторых, мы можем полагать, что формальное доказательство отнюдь не схватывает суть интуитивного доказательства, что означает неалгоритмизуемость человеческого ума, в частности математического мышления [11].

Здесь существует тонкий момент, связанный с последним уточнением касательно математического мышления. Математика столь специфична в отношении остальной человеческой практики, что вполне уместно предположить, что математическое мышление не является парадигмой рационального мышления. Привычно предполагать обратное, но есть ли у нас какая-либо гарантия, что все математические проблемы имеют решение, т.е. что математическое мышление в целом рационально. Наличие принципиально неразрешимых математических проблем говорило бы в пользу иррациональности математики. Однако поскольку обсуждение этих самых проблем ведется в рамках рационального мышления, вряд ли можно надеяться на какой-то ответ на заданный вопрос. Мы можем лишь гипотетически предполагать, что все математические проблемы в принципе разрешаемы, и в этом случае математика есть рациональное предприятие. Эту гипотезу К. Гедель называет рациональным оптимизмом.

Но коль скоро математика рациональна, нормативные элементы в математическом мышлении отбросить нельзя. И опять-таки, коль скоро важнейшей составляющей математики является доказательство, именно в нем нужно искать те элементы рациональности, которые не сводятся к механическим операциям. Другими словами признание нормативности доказательства влечет за собой наличие в нем таких особенностей, которые придают смысл и значение математическому дискурсу.

При обсуждении нормативных элементов математики не обойтись без апелляции к математической практике. Само представление доказательства предполагает определенную организацию, преследующую цель понимания его человеком, обладающим некоторой компетенцией не только в математике, но и в рациональном мышлении. Эта организация состоит в структуре доказательства, которая включает в себя основной ход мысли представляющего, вспомогательные элементы – леммы и следствия, определенные пробелыв виде тривиальных вычислений и т.п. Читающий такое доказательство должен иметь более или менее такие же стандарты рациональности, какие имеет представляющий доказательство. Их расхождение часто является предметом математического фольклора, когда опускание «тривиальных» рассуждений («отсюда ясно…») приводит к трудностям, поскольку «тривиальность» понимается по-разному. Но в целом эти стандарты совпадают до такой степени, что пробелы в доказательстве при его чтении восстанавливаются, ошибки и описки корректируются, и во многих случаях читатель понимает скорее то, что хотел сказать представляющий доказательство, чем то, что тот написал. При такого рода восстановлении смысла доказательства всякий раз читающим осуществляется выбор: чем заменить ошибочный символ, что вставить в опущенный в доказательстве фрагмент и т.д. Решение, принимаемое читателем, осуществляется на основе рационального выбора, а отнюдь не на основе каких-то других (посторонних) соображений. Ясно, что математическая аргументация может убедить только того, что кто уже знаком с математическим доказательством. Есть нормы математического сообщества, и в этом смысле деятельность математика по представлению и пониманию доказательства нормативна.

Таким образом, эпистемические элементы доказательства как разновидности рационального мышления не следует путать с чисто математической трактовкой понятия доказательства как последовательности символов. Дело в том, что формальное доказательство есть такой же математический объект, как числа, а доказательства о доказательствах есть результат рационального рассуждения. Это рассуждение выходит за пределы математики, поскольку речь идет о том, чтобы сделать принятие доказательства необходимым с точки зрения рационального человека. Этот вид необходимости есть эпистемическая категория.

Именно эта эпистемическая необходимость заставляет искать все более убедительные (изящные, красивые, элегантные и проч.) доказательства уже доказанного математического утверждения. Нормативность присутствует и в том, что ошибочные доказательства (ошибочность которых обнаруживается позже) рассматриваются до определенного времени в качестве легитимных доказательств. Еще большую роль нормативность играет в принятии «доказательств», статус которых не полностью отвечает парадигмам математического доказательства, скажем в случае компьютерных доказательств. Все сомнения относительно гипотетического доказательства имеют эпистемическую природу. Выдвигающий аргумент и принимающий его осуществляют некоторое решение, диктуемое их рациональностью.

Как всякое человеческое суждение, это решение может иметь разную эпистемическую надежность. В самом деле, есть теоремы, доказательство которых неоспоримо показывает их истинность. Но есть и такие теоремы, доказательство которых оказывается ошибочным. Часто достаточно исправления некоторого дефекта в доказательстве, а иногда утверждение, предполагаемое теоремой, объявляется ошибочным. Пограничным случаем является то, когда часть доказательства не подчиняется обычным рациональным критериям, как это имеет место в случае компьютерного доказательства. Безусловно, компьютерные операции рациональны в том смысле, что программы задаются на основе рациональных принципов, но такая «рациональность» производна. Ясно, что эпистемические характеристики компьютерных доказательств сильно отличаются от характеристик обычного человеческого доказательства, заключающегося в постижении математической необходимости.

Именно предполагаемые сомнительными доказательства являются основанием для того, чтобы считать доказательство эпистемическим понятием. В конце концов, сомнение в правильности доказательства коренится в человеческой способности принимать хорошие суждения и отвергать плохие. Такого рода способности редко являются врожденными (как, например, в случае Рамануджана) и в основном оказываются результатом тренировки и обучения. Проблема состоит в том, как рациональные критерии различения плохого и хорошего доказательств перенести на те случаи, когда рациональность является производной, скажем на компьютерные доказательства. Главную роль при этом должно играть понятие эпистемического обоснования, а обоснованность символической системы есть понятие нормативное. Д. Тимошко полагает, что «виды нормативного суждения в обоснованном доказательстве реальной математики являются очень тонкими, расплывчатыми и историческими, включающими личные и исторически обусловленные суждения о том, что для математика разумно принять… В любом случае это подтверждает позитивный аргумент, что геделевский рационализм, тезис о том, что математика осмысленна, влечет, что математика есть существенно нормативная деятельность» [12].

Итак, если мы считаем доказательство нормативным понятием, то формальное доказательство под эту категорию не подпадает. Чем же в этом случае является формальное доказательство? До сих пор мы отталкивались в своем анализе от того, что формальное доказательство является «конечным» результатом той деятельности, которая приводит к рассмотрению доказательства как математического объекта, в то время как доказательство существует помимо формальных систем. С этой точки зрения формальное доказательство схватывает лишь некоторые черты подлинного доказательства, которое использует все ресурсы «реальной» математики. Однако на эту ситуацию можно посмотреть и по-другому. Формализацию можно рассматривать как желаемый конечный пункт развития некоторой области математики. В свете сведения всей математики к теории множеств и принятия «канонической» версии аксиоматической теории Цермело – Френкеля можно представить себе всю математику как формальную систему, как множество формул первого порядка с единственным нелогическим символом принадлежности. Тогда под «доказательством» можно подразумевать только реальную формальную дедукцию в аксиоматической системе Цермело – Френкеля. Все остальные пояснения, которые обычно используются в неформальном доказательстве, не являются частью реальной математики. Но в этом случае понятие осмысленности в математике теряет свое значение, поскольку доказательство больше не является эпистемическим понятием. Все, что относится к неформальной математике, есть просто эвристика, помогающая прийти к подлинному доказательству. Наконец, неформальная математика может рассматриваться как способ уплотнения информации, например когда мы вынуждены ради краткости давать ярлыки формальным математическим утверждениям типа «вполне-упорядочение». Уже те слова, которые используются в ярлыках, несут на себе метафорическую нагрузку.

В рамках такой картины вся математика представляет собой совокупность формальных следствий из аксиом теории множеств. Некоторым из этих следствий вы можете уделить особое внимание, обеспечив их какими-то пояснениями, которые, строго говоря, не относятся к математике. Это есть просто процесс уплотнения информации, которая содержится в следствиях из аксиом. Такая картина, конечно же, абсолютно неприемлема для понимания природы математики, но она представляет собой точную альтернативу эпистемической природе доказательства. И как всякая крайность, она высвечивает как свои собственные недостатки, так и недостатки других альтернатив.

Наиболее выпуклым недостатком такой картины является радикальное несовпадение с математической практикой. Значимые теоремы не могут быть результатом уплотнения информации, поскольку их поиск и мотивация поиска имеют совсем иную природу. Осмысленность математики состоит в поиске решения тех проблем, которые формулируются вне связи с формальными концепциями.

Осмысленность математического дискурса подразумевает, что математические термины должны иметь значение. Природа значения терминов языка в данном контексте представлена двумя крайними взглядами: платонистской концепцией значения как вневременной сущности и витгенштейновской концепцией значения как употребления. Каждая из этих точек зрения апеллирует к особенностям математического дискурса, поскольку вопрос о соотношении этих двух взглядов на природу математического знания может быть рассмотрен более точно как сравнение формальных концепций и их интерпретаций. В конце концов, неформальные математические концепции могут быть рассмотрены как интерпретации формальных понятий. Такая постановка вопроса позволяет установить некоторого рода симметрию между двумя взглядами на природу доказательства. Теоретико-множественное обоснование математики имеет не эпистемологический характер, а скорее, онтологический. Ведь теория множеств рассматривается платонистски настроенными исследователями как описание некоторой независимо существующей реальности. Это описание «по определению» дается аксиомами теории множеств и по сути своей представляет символическое описание мира. Этим самым обстоятельством подкрепляется «первичность» формальной концепции доказательства. Естественно, что аксиомы теории множеств конструируются таким образом, чтобы схватывать интуитивные представления о природе понятия множества. Другими словами, между эпистемологической и онтологической картинами должно быть соответствие.

Примечания

1. См.: *Платон*. Сочинения. – М.: Мысль, 1968. – Т. 1. – С. 384–393.

2. *Рассел Б.* История западной философии. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1997. – С. 101–102.

3. См.: *Hacking I.* What mathematics has done to some and only some philosophers // Mathematics and Necessity / Ed. T. Smiley. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2000. – P. 92–93.

4. См.: *Solove D*. Privacy and power: Computer databases and metaphors for information privacy.

5. См.: *Целищев В.В*. Онтология математики. – Новосибирск: Нонпарель, 2003.

6. Цит. по: *Kasner E., Newman J*. Mathematics and the imagination. – N.Y., 1940.

7. www.rattlesnake.com/notions/math-metaphor.html

8. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М*. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – С. 118.

9. Там же.

10. *Putnam H*. Representation and reality. – MIT Press, 1988. – P. 117.

11. См.: *Целищев В.В*. Алгоритмизация мышления: Геделевский аргумент. – Новосибирск: Параллель, 2005.

12. *Tymoczko D*. Godel and the concept of meaning in mathematics // Synthese. – 1998 – V. 114. – P. 25–40.

Институт философии и права СО РАН,
г. Новосибирск

Tselishchev, V.V. **The persuasiveness of proof and rationality of reasoning**

The paper is devoted to some epistemological aspects of mathematical proof. Firstly, the notion of persuasiveness is considered. Secondly, the notion of meaning of proof is related to notion of formal proof. H. Putnam's thesis that proof is rather epistemological notion than purely mathematical one is discussed.