



*Проблемы логики и методологии науки*

**ПРОБЛЕМЫ СИНТЕЗА И КОМБИНИРОВАНИЯ  
ЛОГИКИ И ВЕРОЯТНОСТИ**

*В.М. Резников*

**Введение в проблему**

По мнению П. Суппеса, интеграционные процессы в науке не касаются наук, где предметы и методы исследования являются различными [1]. В отличие от далеко расходящихся дисциплин, различные формы взаимодействия близких по духу формальных дисциплин являются плодотворными. Так, алгебра оказалась эффективной для анализа геометрических проблем. Об этом свидетельствует появление науки под названием «алгебраическая геометрия». В XX столетии была обнаружена близость структур, изучаемых в логике и алгебре. Эффективность алгебраических методов для анализа логических проблем привела к образованию в логике нового раздела под названием «алгебраические системы».

Проблема взаимоотношений формальных дисциплин не является популярной в философской литературе. Исключение составляют работы, посвященные анализу взаимоотношений логики и математики. Действительно, работы, посвященные взаимоотношению логики и математики в контексте происхождения этих дисциплин и их взаимовлияния, являются традиционными в философии математики.

Во второй половине XX столетия исследования связи формальных дисциплин являются актуальными научными областями. В этой области исследований выделяются два направления.

Первое направление связано с созданием универсальной логики. Развитие этого направления определяется как теоретическими,

так и прагматическими интересами. Вектор теоретического интереса направлен к определению условий, гарантирующих, что логика  $L$  будет обладать свойством  $N$ , которым обладают две различные логики  $L1$  и  $L2$ , и на основе синтеза последних и получена логика  $L$ .

Второе направление связано с проблемами комбинирования и синтеза логики и вероятностной математики. Развитие этого направления мотивировано рядом взаимосвязанных причин: во-первых, необходимостью аксиоматизации и формализации знания в таких областях, принципиальной особенностью которых является неточность, неопределенность; во-вторых, запросами развития и применения интеллектуальных систем в таких областях знания, как медицина, психология и экономика.

Попытки аксиоматизации знания в указанных областях обнаружили недостаточность классической логики для решения этой проблемы. Классическая логика обладает весьма ограниченными возможностями как для описания неопределенностей, так и для вычисления вероятностных оценок.

В литературе считается, что комбинирование и синтез логики и вероятностной математики обеспечивают решение проблем, относящихся к описанию неопределенностей и вычислению статистических оценок этих неопределенностей. Данная статья посвящена анализу эффективности комбинирования и синтеза в контексте решения вычислительных проблем.

Какими должны быть свойства агрегированного формального объединения? Не существует однозначного ответа на этот вопрос. В некоторых случаях синтезируемое формальное объединение будет содержать свойства, присущие всем входящим в объединение частям. Если смотреть с общенаучных позиций, то в результате синтеза возникают свойства, которыми не обладает ни одна из частей.

Определение синтеза должно учитывать адекватность и прагматичность синтеза для исследуемых проблем. С прагматических позиций под синтезом формальных дисциплин будем понимать такое агрегированное формальное образование, которое обладает требуемыми свойствами, представляющими собой некоторую комбинацию свойств отдельных дисциплин. Синтезированное формальное образование является прагматически значимым и эффективным, если оно обеспечивает решение исследуемых проблем.

Синтез логики и математики, в частности теории вероятностей, должен обеспечить описание неопределенностей и неточностей, их статистический анализ, а также осуществление рассуждений с неопределенностями. Проведение рассуждений с неопределенностями предполагает количественный анализ неопределенностей, вычисление неопределенностей выводимого суждения на основе неопределенностей посылок и нахождение искомого суждения с вычисленными статистическими оценками. Каким образом соотносится синтез логики и вероятности с синтезом логик? Ответ на этот вопрос определяется логическим статусом вероятности. Если вероятность является логикой, то синтез логики и вероятности есть частный случай синтеза логик. Если вероятность не является логикой, то методы синтеза логик не в полной мере адекватны для синтеза логики и вероятности.

Оценка с количественных позиций степени близости или расхождения логики и вероятности представляет собой чрезвычайно сложную проблему. В данной работе мы исследуем обоснованность аргументов о близости и расхождении логики и вероятности, не определяя количественным образом степени похожести и отдаленности этих формальных дисциплин.

Наш анализ опирается прежде всего на классическую логику. Вначале мы будем описывать характерные особенности логики, а затем исследовать, обладает ли вероятность этими свойствами. Каковы основания считать вероятность логикой? Для этого необходимо дать определение логики. В руководствах по классической логике подчеркиваются две ее основные особенности. Во-первых, это наука о правильном мышлении. Во-вторых, если посылки корректных рассуждений являются истинными суждениями, то и заключение тоже будет истинным суждением.

Имеет ли теория вероятностей репутацию науки о корректном мышлении? Один из создателей классической логики, Дж. Буль, считал, что логика и теория вероятностей – это науки, на которых основана мыслительная деятельность. Э. Джейнс, один из влиятельных методологов в области применения вероятностных формализаций в науке и одновременно авторитетный геофизик, использовавший в этой области вероятностные методы, полагал, что вероятность – это логика науки [2]. Вслед за Г. Поля он считал, что логика – наука о дедуктивных рассуждениях, а вероятность – наука о правдоподобных рассуждениях.

Классическая логика гарантирует, что корректные рассуждения, основанные на истинных посылках, обеспечивают получение истинного заключения:

$$\begin{array}{l} \text{Если } A, \text{ то } B \\ A \\ \hline B \end{array} \quad (1)$$

Данный результат является чрезвычайно значимым. Он обеспечивает проверку правильности полученных результатов. Индуктивные схемы выполняют другие функции, например на основе следствия (заключения) оценивается посылка (причина):

$$\begin{array}{l} \text{Если } A, \text{ то } B \\ B \\ \hline A \text{ становится правдоподобнее.} \end{array} \quad (2)$$

В отличие от дедуктивной логики индуктивная логика, основанная на анализе понятия «вероятность», даже при проведении корректного анализа и истинных посылках не гарантирует получение истинного заключения, а гарантирует получение лишь вероятного заключения. Во многих ситуациях индуктивная логика ограничена проведением качественного анализа и не обеспечивает вычисление вероятности заключения.

Схема (1) является обоснованной, но и она не свободна от критики. Получение истинных результирующих суждений предполагает, что рассуждения были проведены на основе логических законов. В конструктивной логике многие так называемые основные логические законы были подвергнуты суровой критике. С интуиционистских позиций необоснованными законами являются закон исключенного третьего и закон непротиворечия.

Другая критика дедуктивных схем, например дедуктивно-номологической схемы, связана с рядом негативных особенностей импликации. Импликация ведет к так называемому парадоксу контрапозиции. Кроме того, в рассуждениях, основанных на импликации, истина следует из чего угодно, в том числе из ложных посылок.

### Согласованность в логике и вероятности

Привлекательная особенность классической логики заключается в том, что логический семантический анализ суждений, составляющих посылки и заключение логических правил, обеспечивает получение согласованных истинностных значений. Пусть  $A$ ,  $A \rightarrow B$  посылки, а  $B$  заключение правила modus ponense:

$$A, A \rightarrow B \text{ „ } B. \quad (3)$$

Тогда истинностные значения любой пары суждений однозначно определяют истинностное значение третьего суждения. Так, например, истинностные значения посылок однозначно определяют истинностное значение заключения. Истинностные значения заключения и любой посылки однозначно определяют истинностное значение второй посылки. Истинностные значения правила являются согласованными.

В отличие от истинностной интерпретации вероятностная интерпретация не является такой точной. При вероятностной интерпретации невозможно по вероятностям двух суждений точно определить вероятность третьего суждения:

Пусть известны вероятности  $P(A)$  и  $P(A \rightarrow B)$ .  
Тогда  $P(A) + P(A \rightarrow B) - 1 < P(B) < P(A \rightarrow B)$ .

Пусть известны вероятности  $P(A)$  и  $P(B)$ .  
Тогда  $1 - P(A) < P(\neg A \vee B) < 1 - P(A) + P(B)$ .

Наконец, пусть известны вероятности  $P(B)$  и  $P(A \rightarrow B)$ .  
Тогда  $1 - P(A \rightarrow B) < P(A) < 1 + P(B) - P(A \rightarrow B)$ .

Наиболее общие результаты такого плана были получены П. Суплесом [3].

В классической логике истинностные значения простых суждений предполагаются известными априори. В стандартной вероятностной математике и во всех вероятностных концепциях, за исключением полностью субъективистских теорий, исходные вероятности не известны заранее. Эти вероятности вычисляются на основе ряда принципов: принципа индифферентности, принципа максимальной энтропии, принципа

общей причины в байесовских концепциях, принципа максимального правдоподобия в стандартной статистической теории.

### **Аддитивность и монотонность в логике и теории вероятностей**

В теории вероятностей вероятность является аддитивной функцией. Это означает, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Для логических, так называемых когнитивных, переменных в общем случае свойство аддитивности не выполняется. Пусть  $H$  и  $\neg H$  соответственно обозначают обоснованности противоположных гипотез, а  $E$  – имеющиеся данные и основания для доказательства этих гипотез. Тогда  $P(H/E)$  обозначает вероятность обоснованности гипотезы  $H$  на базе имеющихся оснований  $E$ , а  $P(\neg H/E)$  – степень обоснованности гипотезы  $\neg H$  на базе имеющихся оснований  $E$ .

Так как возможно, что для данных оснований ни одна из гипотез не обоснована, получаем, что  $P(H/E) + P(\neg H/E) \leq 1$  [4]. Имеет место не аддитивность, а субаддитивность. Рассмотрим применение когнитивных переменных на примере.

Пусть  $H$  обозначает событие, состоящее в том, что будет вечеринка. Тогда  $\neg H$  обозначает, что вечеринка не состоится. По решению организаторов мероприятия вечеринка состоится, если при бросании правильной монеты выпадет герб. Организаторы не приняли решение по поводу вечеринки на случай невыпадения герба. Пусть  $E$  означает событие, состоящее в том, что выпал герб. Тогда вероятность вечеринки при условии выпадения герба определяется следующим образом:  $P(H/E) = P(E) = 1/2$ , здесь  $P(E)$  вероятность выпадения герба правильной монеты. Вероятность события, о котором ничего неизвестно, оценивается нулевой вероятностью. Поэтому вероятность доказательства об отмене вечеринки при условии, что герб не выпал, равна нулю:  $P(\neg H/E) = 0$ .

От анализа согласованности перейдем к анализу монотонности. Классическая логика является монотонной. Полученный вывод не изменяется, если дополнительные переменные принимаются во внимание. В математике, в частности в теории вероятностей, вывод является немонотонным, при учете новых данных вывод может измениться.

### **Противоречие и интуитивность в логических и вероятностных рассуждениях**

Противоречия в логике не являются допустимыми. Они недопустимы потому, что на основании противоречащих посылок можно доказать абсолютно все, в том числе абсолютно ложные утверждения. Все сказанное о недопустимости логических противоречий относится и к математике. Особенностью теории вероятностей является большое количество логически корректных, но неинтуитивных результатов. Неинтуитивные результаты интенсивно изучаются, они имеют большое значение для практической деятельности, так как при их появлении сложно принять обоснованное решение. Некоторые подходы к принятию решений для так называемых парадоксов агрегации даны в [5].

Все приведенные сопоставительные аргументы можно разбить на три группы. Аргументы первой группы показывают, что вероятностные рассуждения не обладают важнейшими свойствами классической логики, прежде всего консервативностью истины и монотонностью. Аргументы второй группы показывают, что вероятностные рассуждения обладают только приближенно некоторыми значимыми свойствами классической логики. В классической логике истинностные значения суждений, составляющих логические правила, являются согласованными. Каждая пара истинностных значений однозначно определяет истинностное значение третьего суждения. При вероятностной интерпретации логических правил согласованность выполняется приблизительно. Каждая пара вероятностей позволяет только приближенно, но не точно вычислить третью вероятность. Третья группа аргументов фиксирует свойства, которыми обладают вероятностные рассуждения, но не обладают рассуждения в классической логике. Так, вероятностные рассуждения являются немонотонными, а логические – монотонными.

Вполне очевидно, что теория вероятностей не есть логика. Возникает следующий вопрос: можно ли рассматривать синтез логики и вероятности как частный случай синтеза различных логик? По-видимому, синтез логики и вероятности не является частным случаем синтеза логик. Вероятность предназначена для вычислений. Вычислительные проблемы являются сложными, и логические подходы не адекватны для их решения. В заключительной части статьи мы собираемся показать, что все известные подходы к синтезу и комбинированию логики и вероятности не обеспечивают решение вычислительных проблем.

Комбинирование формальных дисциплин в отличие от синтеза не предполагает создание интегрированного формального продукта. Комбинирование предполагает последовательное применение одной формальной дисциплины к результатам, полученным на основе другой дисциплины. Тем самым комбинирование избегает сложных проблем синтеза, а с другой стороны, оно дает возможность использовать сильные стороны каждой дисциплины.

Вычислительные проблемы синтеза и комбинирования формальных дисциплин имеют общую природу с проблемами применения формальных методов в практике научных исследований. Так как комбинирование и синтез являются составной частью интеллектуальных систем, широко используемых в практике научных исследований, проблема обеспечения точности вычислений в контексте синтеза оказывается актуальной. Проблему вычислений рассмотрим на двух примерах комбинирования логики и теории вероятностей и на одном примере синтеза. Но вначале – несколько слов об общих проблемах, препятствующих достижению точности вычислений.

Современные статистические методы обеспечивают практически неограниченную точность вычислений, если теоретическая модель адекватна данным. Теоретическая модель случайных величин задана, если известно распределение случайных величин и имеется информация о виде зависимости случайных величин или о том, что они независимы. Обоснование адекватности теоретической модели формальными методами является чрезвычайно сложной проблемой. Во-первых, получение распределения во многих областях невозможно, так как законы в этих науках не имеют количественной формы. Во-вторых, в силу проблемы недоопределенности теоретического знания эмпирическими данными множество распределений может оказаться практически в одинаковой степени адекватно данным. В-третьих, современные методы позволяют точно определить параметры распределения, если распределение уже известно.

С независимостью связаны свои проблемы. Точное определение независимости предполагает знание теоретического распределения. Поэтому в практике научных исследований модель независимых экспериментов принимают на основе неформальных рассуждений. Так, считают, что результаты экспериментов статистически независимы, если эксперименты проводятся независимо друг от друга и фоновые условия этих экспериментов контролируются. Однако полный контроль фоновых условий

невозможен даже в физике. Другим основанием для принятия модели независимых экспериментов является слабая коррелированность данных. Принятие идеализации независимых экспериментов чревато большими вычислительными погрешностями. В работе П.С. Эльясберга [6] показано, что принятие модели независимых экспериментов для выборки данных объемом в тысячу точек и с коэффициентом корреляции 0,01 приводит к тому, что характеристики этой модели (например, дисперсия) будут отличаться на порядок от характеристик первоначальной модели слабозависимых экспериментов.

Сложность обоснованного принятия теоретической модели иногда приводит к отказу от ее использования. Предполагается, что многие характеристики можно получить на основе анализа данных, не используя теоретические модели. Этот подход тоже является проблематичным, статистика – это скорее искусство, чем наука. Поэтому гарантированно получить точный результат на основе данных сложно.

#### **Некоторые проблемы вычислений на примерах широко используемых концепций**

Байесовская концепция популярна как среди философов, применяющих формальные методы, так и среди тех, кто занимается системами искусственного интеллекта.

В байесовизме выделяются субъективистское и объективистское направления. В первом варианте исследуется несколько статистических гипотез в зависимости от поведения связанных с ними событий. Условные вероятности этих событий при условии корректности гипотез считаются известными. Первоначальные вероятности гипотез считаются априори известными или задаются с помощью принципа индифферентности. При появлении какого-либо события, связанного с гипотезами, на основе теоремы Байеса пересчитываются условные вероятности гипотетических событий при условии произошедшего события. Данный подход не гарантирует получение точных вычислений, так в нем используются нереалистичные предпосылки. Во многих областях знания получение вероятностей гипотез недостижимо. Принцип индифферентности адекватен только для описания симметричных положений дел.

Вторая стратегия является объективистской байесовской методологией. Это направление обязано своим возникновением запросам

интеллектуальных систем. Предполагается, что положение дел задано с помощью направленного графа без циклов. Вершины графа – это изучаемые события. Если события связаны, то эта связь представлена ребром графа. В объективистской концепции исходные вероятности вычисляются на основе принципа максимальной энтропии. На основе этого принципа определяются такие значения вероятностей, которые максимизируют функцию энтропии. Известно, что энтропия является максимальной для вероятностей независимых событий. Несвязанные графические структуры считаются независимыми. Способ определения независимости интуитивно привлекателен. Тем не менее он не гарантирует, что несвязанные структуры являются статистически независимыми. Формальную независимость можно определить только на основе формальных методов. В байесовской концепции исходят из того, что теоретические свойства модели, такие как независимость случайных величин и распределение вероятностей случайных величин, могут быть получены на основе не формальных, а содержательных рассуждений или они известны априори. Поскольку ошибки в использовании необоснованно принятой теоретической модели могут быть значительными, постольку в некоторых подходах к комбинированию вероятности и логики все вычисления основаны на эмпирическом анализе данных. В качестве такого примера рассмотрим комбинирование логического программирования и статистического анализа.

Область логического программирования предназначена для нахождения искомого дедукции на основе известных посылок в интеллектуальных системах. Все используемые правила и искомая формула заданы в виде импликаций. Антецедент каждого правила и искомой формулы – это конъюнкция посылок, а заключение – некоторая логическая переменная. За счет ограниченности логического языка в нем используются только связки: конъюнкция, импликация и отрицание системы логического программирования гарантируют выведение любой конечной формулы с помощью метода резолювент на основе простых операций унификации и подстановки [7].

Применение интеллектуальных систем во многих областях знания предполагает, что заключение импликативных правил следует из посылок не логически строго, а частично, с некоторой вероятностью. Возникает задача дополнить логическую часть интеллектуальной системы блоком, осуществляющим статистический анализ. Статистический анализ импликативных правил достаточно сложен, так как

импликация не имеет адекватной статистической интерпретации и вероятность импликации не может быть точно вычислена. Желая избежать сложностей, связанных с вычислением вероятностей импликаций, иногда пытаются заменить вычисление импликаций вычислением условных вероятностей. Покажем, что апелляция к условным вероятностям может привести к ошибкам.

Пусть необходимо получить вывод из заданных правил искомого положения дел, описываемого переменной  $E$  с максимально возможной вероятностью. Пусть уже получено, что  $P(E/ABC)$  – это условная вероятность  $E$  на основе положений дел, описываемых переменными  $A, B, C$ , и она максимальна, если ограничиться тремя переменными. Возникает вопрос: включать ли другие переменные  $F$  и  $G$  или ограничиться уже найденными переменными? Условная вероятность является немонотонной функцией. Поэтому включение новых переменных может уменьшить эту функцию. Но вероятность импликации является монотонной функцией, поэтому включение новой переменной обязательно увеличит вероятность. Так как в логическом программировании вывод осуществляется на основе импликативных правил, необходимо вычислять вероятность импликации.

Если статистическая теоретическая модель полностью неизвестна, то существующие методы не гарантируют получение удовлетворительных результатов. В этом случае необходимо отказаться от теоретических подходов в пользу эмпирической метрологической концепции Алимова [8]. Метрологический подход адекватен для измерения маловариабельных характеристик, а также для тех областей знания, где неизвестны законы распределения вероятностей. В метрологической концепции данные группируются и для каждой группы определяется искомая статистическая характеристика. Если абсолютная разность максимального и минимального значений этой оценки меньше заданной точности, то найденная оценка является устойчивой. Если такую оценку обнаружить не удастся, то исследуемая величина сильно вариабельна, и необходимы иные подходы. Подход Ю.И. Алимова обеспечивает вычисление полуэмпирических устойчивых оценок, если они существуют, и он является некоторым прообразом искомой полуэмпирической теории, так как чисто эмпирические подходы неадекватны для проведения статистического анализа.

Наиболее простым вариантом синтеза является синтез логики первого порядка и теории вероятностей. Логика обеспечивает описание

неопределенностей и логическую выводимость, а теория вероятностей – вычисление вероятностей. Слабой стороной этого комбинирования является вычисление вероятностей. На основе вероятностей посылок получают неточные вероятности заключения. Один из способов решения вычислений основан на получении одного и того же вывода на основе противоречащих посылок:

$$A, A \rightarrow B \text{ „ } B; \quad (4)$$

$$\neg A, \neg A \rightarrow B \text{ „ } B. \quad (5)$$

На основе вероятностей посылки в четвертом и пятом выражениях однозначно вычисляется вероятность заключения.

### Примечания

1. См.: *Suppes P.* Probabilistic metaphysics. – Oxford: Basil Blackwell, 1984.
2. См.: *Jaynes E.* The probability theory: The logic of science. – Washington University, 1995.
3. См.: *Suppes P.* Probabilistic inference and the concept of total evidence // *Aspects of Inductive Logic* / Ed. by J. Hintikka and P. Suppes. – Oxford, 1983. – P. 49–65.
4. См.: *Haenni R.* Towards a unifying theory of logical and probabilistic reasoning // *ISIPTA'05: 4th International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications* / Ed. by F.B. Cozman, R. Nau, T. Seidenfeld. – Pittsburgh, USA, 2005. – P. 193–202.
5. См.: *Резников В.М.* Вероятностные концепции: анализ оснований и приложений. – Новосибирск, 2005.
6. См.: *Эльясберг П.С.* Вычислительная информация: Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? – М.: Наука, 1986.
7. См.: *Стерлинг Л., Шапиро Э.* Искусство программирования на языке Пролог. – М.: Мир, 1990.
8. См.: *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

Институт философии и права  
СО РАН, г. Новосибирск

### *Rezников, V.M. The problems of synthesis and combining of logic and probability*

Basing on comparative analysis of logic and probability, the paper shows that synthesis of logic and probability is not a special case of synthesis of logics. Pragmatic definition of synthesis of formal disciplines is proposed. Arguments are presented that well-known approaches to synthesis do not solve calculation problems.