Научная жизнь

ЕЩЕ ОДНО ИЗГНАНИЕ ИЗ РАЯ: СЧЕТ СТАНОВИТСЯ БЕЗУМНЫМ

У. Тейт

Я здесь для того, чтобы написать книгу о грязной философии. Грязной философия бывает, когда все ваши усилия направлены на то, чтобы принизить других философов, – это оставляет дурной привкус. Меня извиняет то, что я хочу подорвать скептические философские аргументы о существовании математических объектов, истинности математических аксиом, возможности математического знания и т.п., т.е. показать, что такие аргументы безосновательны и что они – просто пустая трата времени. Я хочу, среди прочих вещей, показать, что критика математики должна быть критикой изнутри: если и есть ошибки, их надо рассматривать как математические ошибки.

Моя стратегия по большей части состоит в том, чтобы показать, что скептические аргументы о математике представляют собой точные аналоги классических скептических аргументов о существовании других умов или даже других физических объектов. По моему мнению, это видно уже из того, что с ними что-то серьезно не так. Но я также хочу показать, в чем такие аргументы неверны. Следуя этой стратегии (и главному из практикующих грязную философию – Людвигу Витгенштейну), я перешел к общему рассмотрению когнитивных идей, таких как значение, знание и понимание, и особенно значение экзистенциальных утверждений.

Но я не хочу говорить здесь о грязной философии, особенно таким приятным людям вроде вас.

Существует другая концепция философии, которая имеет древние и почетные цели и к которой не подобраться людям, подобным Витгенштейну. Это область платоновской диалектики, задача которой состоит в нахождении первых принципов – правильных концепций, определений и аксиом – в каждой области знания. В этом смысле философия не имеет своего предмета, и скорее она есть способ рассмотрения всех предметов с целью достижения ясности и обнаружения оснований.

Именно в этом смысле я хочу говорить о философии.

Я предполагаю, что всякий раз, когда рушится канон, происходит Изгнание из Рая – переход от ограниченной упорядоченной вселенной к относительной беспредельности и отсутствию правил. (И всякий раз находятся, с одной стороны, те, кто стремится сохранить закон и порядок, кто стремится сохранить канон, а с другой стороны, находятся и другие, авантюристы и любители риска, которые лелеют свободу и бросают вызов, игнорируя препятствия, пока не становятся старыми и не пытаются установить новые каноны.)

Есть несколько впечатляющих примеров Изгнания из Рая. Несомненно, любимый пример по все времена – потеря невинности в Эдеме. Существенным моментом тут является то, что вы не можете вернуться домой, и это первоклассное изгнание.

Другое великое Падение, третье мое любимое по счету, – принятие Галилеем и впоследствии другими коперниканской космологии. Ему противостоял упорядоченный мир Данте и Церкви, унаследованный от аристотелевской космологии: Первичный Движитель закрутил сферу неподвижных звезд, которая, в свою очередь, создает смену сезонов, и в соединении с потенциальностями вещей дает объяснение всему естественному движению в мире. Неважно, что было возмущенное движение, такое как траектория копья, которое не принималось во внимание. Более или менее все занимало свое место, включая нас, и знало, как себя вести. Бросить вызов всему этому, предположить, что вещество звезд – такое же, как вещество Земли, что движение звезд не отличается от движения той же Земли, означало открыть дверь на пути к анархии – как в Космосе, так и (что было гораздо важнее для Церкви) здесь, на Земле. Сопротивление было яростным. Дарвин представляет еще одно великое Падение, во многом похожее на галилеевское. Но ко времени Дарвина Церковь не была столь сильной, и сопротивление, хотя оно все еще продолжается, не столь сильное или кровавое.

Но я хочу кратко обсудить другое Падение, или Изгнание из Рая, мое второе любимое по счету. Оно похоже на галилеевское в том отношении, что вызвало сильнейшее сопротивление (ясно, что не похожее на случай с Галилеем). Но в определенном смысле, тем не менее, оно более впечатляющее, поскольку, как и в случае первого исхода из Сада Эдема, невозможно вернуться назад. Конечно, после Галилея человек больше не может быть центром вселенной, но давайте посмотрим правде в глаза: если бы могли попросить людей вернуться назад, они, вероятно, сказали бы, что это не такое уж замечательное место. По крайней мере при нашем понимании естественного космоса господство науки позволило включить в сферу закона гораздо большее число феноменов, чем это можно вообразить в аристотелевской науке, и остается надежда создать единую физическую теорию, способную объяснить все силы природы, превратив специфическое единство аристотелевской науки в реальность. Поэтому вполне возможно, что, обращаясь к гармоничной картине природы, мы снова вернемся домой.

В середине 1870-х годов мир математики был более или менее спокойным и, по крайней мере с виду, изящным и опрятным. Были арифметика и высший анализ. Евклидова геометрия лишилась центрального места: точки в евклидовом пространстве могли быть представлены тройками действительных чисел, как это имеет место в аналитической геометрии, и свойства пространства могли быть выражены аналитически. Так что существенная онтология математики казалась замкнутым и упорядоченным миром, основанным на системе действительных чисел. Можно рассматривать множества или функции действительных чисел, множества и функции от множеств и функций и т.д., но основа всего этого фиксирована: выписываются аксиомы, управляющие действительными числами, и все, что требовал Платон, оказывается более или менее сделанным. Существует бесконечное число трудных для решения комбинаторных проблем, но основания поняты прекрасно, и платоновскому диалектику делать уже нечего.

Конечно, как и в случае космоса Церкви, все было не совсем так: были трудности с нахождением уместных определений или даже основных операций в исчислении, и были конфликты по поводу использования новых видов «теоретико-множественных» методов в математическом конструировании и мышлении. Но, может быть, все-таки справедливым будет сказать, что с виду все было относительно спокойно.

Моим вторым любимым Изгнанием из Рая является случай с Георгом Кантором (1845–1918), сыном датчанина, купца, успешно торговавшего в Санкт-Петербурге, и русской матери. Они перебрались в Германию, когда Кантор был совсем молодым, и хотя он чувствовал себя здесь не в своей тарелке, прожил тут всю свою жизнь. Свою академическую карьеру он делал в университете города Галле, места, из которого он вскоре отчаянно захотел уехать. Но, частично из-за сопротивления со стороны власть имущих его идеям, о которых мы будем говорить, он не смог этого сделать. Сначала он занимался теорией чисел, а затем – анализом. Занимаясь последним, Кантор пришел к идеям, которые радикально изменили математику, – он считается основателем теории множеств. Во многих отношениях он был психически неустойчив, считалось, что он страдает маниакально-депрессивным психозом. Последние свои годы он провел в сумасшедшем доме. Вероятно, подтверждением его психической неустойчивости была навязчивая идея, что шекспировские пьесы были написаны Бэконом: попытки доказать это отняли у него много времени и усилий.

В 1870-х годах в ходе решения одной важной проблемы в анализе Кантор ввел операцию, которая в применении к множеству *P* действительных чисел дает другое такое множество *P*¢. *P*¢ получается из *P* удалением из него определенных чисел (числа, которые «изолированы» по отношению к другим числам в *P*), и поэтому каждое число в *P*¢ уже находится в *P*:

P Ê *P*¢.

Может случиться так, что из *P* не удаляются никакие числа, т.е. нет изолированных чисел, и

P = *P*¢.

Это хороший случай, и мы можем остановиться на этом. Но в общем *P* имеет изолированные числа, и при переходе к *P*¢ отношения изменяются и появляются новые изолированные числа. В этом случае мы должны продолжать и применить операцию к *P*¢ для образования *P*¢¢. Если мы продолжаем применять эту операцию, то получаем вложенную последовательность

P Ê *P*¢ Ê *P*¢¢ Ê … Ê ***Pn*** Ê ***P*** $^{n+1}$ Ê ...

Иногда после конечного числа ***n*** шагов ***Pn*** есть то же самое множество, что и (***Pn***)¢ = ***Pn*** $^{+1}$, и тогда опять-таки мы можем остановиться: Кантор получил множество ***Pn***, которое хотел. Но иногда это не так, и каждое множество Pn^{+1} отлично от предыдущего Pn. Если это случается для каждого n, тогда после того как мы пробежали все стадии, все еще остаются числа, которые все в Pn. Мы должны дать множеству всех оставшихся чисел имя, – назовем его P^{w} (и не спрашивайте меня, почему последняя буква из греческого алфавита, – быть может, это нижняя часть ленивой 8, я не знаю), так что мы имеем

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \ldots \supseteq Pn \supseteq Pn^{+1} \supseteq \ldots \supseteq P^{\omega}$$

Но сейчас, для решения проблемы Кантора, мы должны продолжать применять операцию и к P^{ω}, получая $P^{\omega+1}$ и т.д.:

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \ldots \supseteq Pn \supseteq P^{n+1} \supseteq \ldots \supseteq P^{\omega} \supseteq P^{\omega+1} \supseteq \ldots$$

На этом пути, если мы забудем об исходной операции и просто рассмотрим индексы, мы получаем чисто формально ряды «чисел»:

$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots,$
$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots$
$\omega + \omega = \omega \times 2, \ldots, \omega \times 3, \ldots \omega \times n, \ldots$
$\omega \times \omega = \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots$
$\omega^{\omega}, \omega^{(\omega\omega)}, \ldots$

Это что – сумасшедший счет?

Но вы еще не видели главного!

На самом деле неявная схема, используемая для порождения этих трансфинитных чисел, беднеет (peter out) (откуда же еще берется это выражение?) даже до достижения всех чисел, нужных для решения проблемы Кантора.

Но позднее, в 1883 г., в одном из величайших классических трудов по философии, который не читали большинство философов, – «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigheistlehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre Unendlichen» Кантор вводит свою общую теорию трансфинитных чисел – и, бог мой, как это все просто!

Если Σ есть исходный сегмент чисел, тогда существует наименьшее число $S(\Sigma)$, которое больше, чем все числа в Σ.

Для того чтобы увидеть, как все это работает, заметим, что

S(пустой сегмент) = 0
$S(0, \ldots,\alpha) = \alpha + 1$
$S(0, 1, 2, \ldots) = \omega$.

И если мы берем Σ в качестве исходного сегмента чисел, указанных выше, мы все еще образуем $S(\Sigma)$, которое имеет имя ε_0, и, продолжая процесс, мы имеем $\varepsilon_0 + 1$ и т.д. Ясно, что мы можем продолжать: всякий раз, когда мы имеем исходный сегмент чисел Σ, мы можем просто взять его супремум $S(\Sigma)$, и продолжать.

Или же мы не можем этого делать? Какова ситуация с тотальностью всех чисел?

Это исходный сегмент чисел; но если мы допустим S(всех чисел) в качестве числа, тогда мы имеем абсурдную ситуацию, когда число меньше самого себя:

S(всех чисел) < S(всех чисел).

Другими словами, *есть фундаментальная проблема различения исходных сегментов Σ чисел, а именно, различения тех сегментов, которым может быть приписана верхняя граница $S(\Sigma)$, и тех, в отношении которых этого сделать нельзя.*

Кантор, который хорошо осознавал эту проблему с самого начала (но скрыл упоминание об этом в конечной сноске к статье), позднее назвал сегменты, не имеющие верхней границы, *противоречивыми множественностями*. В последующей литературе они были названы *собственными классами*, которые следует отличать от сегментов, таки имеющих верхнюю границу и называемых *несобственными классами*, или *множествами*. Но конечно же, это просто именование, а не решение проблемы.

Что Кантор открыл, так это возможность взаимоотношений между *объектами* и *множествами объектов*. В отличие от разговора о множествах объектов некоторой данной фиксированной области, таких как действительные числа, в случае трансфинитных чисел понятие множества чисел само фигурирует динамически в определении понятия числа. В общем, для того чтобы знать, что собой представляет множество объектов, вы должны знать, что собой представляют объекты. Но в случае трансфинитных чисел справедливо обратное: для того чтобы узнать, что такое числа, вы должны знать, что такое множества чисел. Эта ситуация явно попахивает возможностью противоречивости.

Один способ понимания проблемы – мой способ – состоит в том, чтобы увидеть, что нет точного определения «всех чисел», потому что не существует точной математической характеристики того, что такое *множество* или *непротиворечивая множественность*, которая была бы признана адекватной.

Определение чисел делается точным путем наложения на исходный сегмент некоторого точного условия C, так что мы допускаем $S(\Sigma)$ только в том случае, когда Σ удовлетворяет условию C. В этом случае не будет никакой неясности, и мы получаем непроблематичную совокупность всех чисел:

> Если Σ есть исходный сегмент чисел, удовлетворяющий условию C, тогда существует наименьшее число $S(\Sigma)$, которое больше, чем все числа в Σ.

Назовем числа, полученные таким образом, *C-числами*. В отличие от предыдущей ситуации нет противоречия в допущении

S(все C-числа).

Все, что мы можем заключить о тотальности всех C-чисел, – это то, что сама она не удовлетворяет условию C. Если бы она ему удовлетворяла, тогда S(все C-числа) были бы C-числом и мы получили бы противоречие:

S(все C-числа) $<$ S(все C-числа),

как и прежде.

Поэтому нам желательно было бы введение S(все C-числа) как числа. Но если мы сделаем это, тогда *мы не можем сделать этого на основании условия C: мы должны сделать это на основании нового условия, скажем C^+*. Мы можем затем перейти к рассмотрению тотальности всех C^+ чисел и на основании следующего нового условия, скажем C^{++}, возьмем теперь уже ее наименьшую верхнюю границу и т.д. Но этот процесс никогда не кончается: какое бы условие *C* (любые аксиомы) мы ни вводили для получения новых чисел, мы всегда будем получать вполне определенную тотальность *C*-чисел, для которой всегда будет казаться разумным взять его наименьшую верхнюю границу, и продолжать этот процесс.

Получение новых и еще более сильных условий *C*, или аксиом, является одной из самых интересных проблем современной теории множеств. Для того чтобы представить, насколько велики получаемые при этом числа, упомянем просто, что такие числа последовательно называются «недостижимыми», «огромными», «тотально неописываемыми» и «невыразимыми», и все члены этих множеств имеют ранг относительно небольших чисел.

Теория этих чисел существенно неполна: независимо от того, какие аксиомы мы примем, новые и более сильные аксиомы всегда уже наготове. Именно эта открытая незавершенность отличает подобное Изгнание из Рая от того, которое инициировал Галилей, так же как и от изгнания Адама и Евы.

Я должен сказать, что есть много философов и математиков, которые не любят теорию трансфинитных чисел: у них эта теория рождает нелегкие мысли.

И к тому же что можно делать с такими числами? Они выходят за пределы исходной канторовской проблемы счета. Сам он, глубоко религиозный человек, верил, что все непротиворечиво мыслимое человеком Бог мог создать для какой-то пользы (если сказать очень приблизительно), – этакая разновидность лейбницевского принципа изобилия. Но если это так, то путь Бога лежит за пределами Его собственного изобретения. Ведь даже наименьшее недостижимое число не играет никакой роли в современной эмпирической науке. Другое направление исследований в этой сфере состоит в поиске приземленного математического применения этих больших чисел, скажем в поиске решения проблем в области целых или действительных чисел. Есть подобные результаты относительно множеств действительных чисел, но при этом остаются важные нерешенные проблемы относительно таких множеств.

Но независимо от того, насколько бесполезными или беспокоящими являются трансфинитные числа для некоторых людей, вы не можете просто отказаться от них. Скептическая философия и другие формы отрицания позволят этим людям игнорировать такие числа, но они уже введены, и когда мы откроем свои глаза, они все еще здесь и дразнят нас, являя собой вечное препятствие возможности окончательного замыкания математического универсума.

Нет обратного пути в Рай. Но подобно большей части Изгнаний из Рая, оно лучше, чем альтернатива. В нашем случае, хорошая сторона состоит в том, что платоновский диалектик никогда не потеряет работу.

А теперь, полная ирония: «Никто не может изгнать нас из Рая, созданного для нас Кантором». – *Давид Гильберт*.

Гильберт был одним из величайших математиков конца XIX в. Он с удовольствием ел яблоко и напрасно полагал, что мы снова можем вернуться в Рай.