Проблемы логики и методологии науки

ЭПИСТЕМИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА*

В.В. Целищев

Априоризм и доказательство

Одна из самых важных проблем, порождаемых компьютерными доказательствами, заключается в нарушении предполагаемого априорного статуса математического доказательства. Т. Тимошко изложил эту проблему в следующем виде: идея о том, что конкретное утверждение чистой математики может быть установлено через апелляцию к эмпирическим свидетельствам, попросту удивительна. Это противоречит многим представлениям относительно природы математики, а именно:

(1) все математические теоремы известны априори;
(2) математика, в противоположность естественным наукам, не имеет эмпирического содержания;
(3) математика, в противоположность естественным наукам, опирается только на доказательства, в то время как естественные науки опираются только на использование экспериментов;

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Российским гуманитарным научным фондом (грант № 04–03–00337) и Междисциплинарным интеграционным проектом Сибирского отделения РАН № 1 – «Вычислимость и рациональность: исследование сферы применимости тезиса Черча – Тьюринга и понятия эффективного вычисления к проблеме соотношения дедуктивного и эмпирического способов познания когнитивных и физических процессов».

(4) математические теоремы определенны в такой степени, с какой не может сравниться ни одно утверждение естественных наук [1].

Тимошко считает (1) ложным, так как 4-краски рассматривается им как теорема в новом смысле и так как она имеет эмпирическое содержание – вычисление компьютера; (2) ложно по тем же причинам; (3) ложно не по той причине, что 4-краски не имеет доказательства, а потому что доказательство использует эксперимент; (4) ложно, потому что определенность 4-краски не отличается от определенности в естественных науках. Таким образом, математические утверждения известны только априори.

Компьютерное доказательство никаким образом не удовлетворяет критериям априорного утверждения, и поэтому возникает вопрос о том, является ли «компьютерное доказательство» вообще доказательством. Из того, что обсуждалось ранее, следует, что вопрос о том, считать ли компьютерное доказательство вообще доказательством, упирается в эпистемологические проблемы соотношения априорного знания и знания эмпирического.

Дж. Аззуни не считает эпистемологически правильным лобовое противопоставление эмпирического знания и априорного знания и уместным с точки зрения привнесения компьютерными доказательствами эмпирических элементов. Эпистемология имеет дело с условиями принятия некоторого утверждения в качестве истинного. Более общий случай состоит в получении истинного знания. В случае математического знания ситуация, согласно Дж. Аззуни, выглядит так: «Математик *A* доказывает определенную теорему, которая затем публикуется или передается другим неформально. Другие математики читают доказательство, изучают результат или осуществляют свое собственное доказательство этого результата. Таким образом, теорема прокладывает себе путь в профессиональных кругах, и этот процесс продолжается до тех пор, пока все заинтересованные лица не освоят доказательство теоремы. Таким образом, обоснование математического результата внутри математического сообщества следует из обоснования результата членами математического сообщества» [2].

Не совсем верно, что принятие некоторого доказательства как истинного есть результат его проверки всеми членами сообщества; помимо незаинтересованных могут быть люди, для которых мнение авторитета является достаточным. Далее мы обсудим эту возможность. Возникает впечатление, что принятие доказательства есть чисто социологический и даже психологический процесс и сопровождается он всеми эмпирическими процессами, свойственными соответствующим видам знания. В такой картине трудно найти место априорному знанию. Действительно, представление доказательства в стандартном виде включает вывод утверждения внутри некоторой системы, и вывод этот признается допустимым, если он обозрим. Другими словами, этот вывод должен осуществляться согласно определенным правилам, которые приняты в математическом сообществе. Такого рода выводы могут быть подвержены эмпирическим ошибкам, наши веры в получаемые утверждения подвержены психологическим заблуждениям и т.д. В самом деле, прослеживание длинного доказательства может оказаться весьма трудным процессом. Так как же после всего этого можно утверждать, что математические утверждения априорны?

Однако в реальности эпистемический процесс обоснования истинности математических утверждений отнюдь не совпадает с формальным выведением теорем из аксиом. Представим себе, что мы вознамерились по-настоящему проверить доказательство некоторой теоремы. Эта теорема использует ряд других результатов, и для полной уверенности нам нужно проверить доказательство и этих результатов, а они, в свою очередь, опираются на другие результаты и т.д. Таким образом, достоверность в приобретении математического знания может быть достигнута высокой ценой, в частности ценой необозримости всего процесса. Примером подобного рода ситуации является хорошо знакомое утверждение о том, что большая часть математики может быть выведена из аксиом теории множеств Цермело – Френкеля. На практике такого выведения никто не делает, поскольку оно заняло бы тысячи страниц. При понимании доказательства некоторого утверждения *A* исходят не из понимания доказательств тех утверждений, с помощью которых доказывается *A*, а из их гарантированной априорной истинности в рамках системы, принятой математическим сообществом. Понятие гарантированной априорной утверждаемости является одним из ключевых понятий современной эпистемологии, в рамках которой принято отличать гарантированную утверждаемость (warranted assertability) от традиционного понятия истины [3]. Гарантированная утверждаемость – более слабое понятие, не требующее решения всех тех проблем, с которыми сталкивается концепция истины.

Соответственно Дж. Аззуни, принимая для математических утверждений гарантированную априорную утверждаемость, не требует от нее таких характеристик, которые традиционно приписываются априорным математическим истинам. В частности, от гарантированных априорных утверждений не требуется полная независимость от опыта или же полная непогрешимость. Ключевую роль в такого рода различии играет понятие свидетельства: «Рассмотрим конкретную систему Γ, и рассмотрим сложное доказательство α в Γ математиком A. Предположим, что при доказательстве α математик A использует посылки$\beta_1, \ldots, \beta_n$; при этом все посылки взяты из учебников или статей и наш математик никогда не проверял доказательства этих посылок. Теперь если мы сможем найти в математическом сообществе таких индивидов, которые построили или проверили доказательства утверждений $\beta_1, \ldots, \beta_n$, тогда можно проследить свидетельства в пользу принятия математиком A этих посылок. Эти доказательства в свою очередь могут опираться на γ-дополнительные посылки $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, которые, в свою очередь, могут быть прослежены к своим доказательствам. Рано или поздно этот процесс должен остановиться, так что мы получим доказательства, в которых свидетельства не играют основательной роли. Только в том случае, если это возможно, мы можем описать свидетельство, поддерживающее вывод α из Γ, в качестве такого свидетельства, которое имеет математический авторитет» [4].

Далее Аззуни приводит определение математически обоснованной веры в истинность математических утверждений: «Сообщество математиков математически обосновано в коллективной вере в то, что вывод α из Γ истинен, если либо сообщество обладает априорными гарантиями для такого утверждения, либо свидетельство, поддерживающее это утверждение, имеет характер математического авторитета» [5].

В данном контексте обсуждаются практически две характеристики математического знания: обозримость доказательства и свидетельство, которое опирается на математический авторитет. Фактически обозримость достигается за счет математического авторитета. И если к доказательству предъявляется требование обозримости, которое считается эпистемически важным, то оно упирается в эпистемическую важность математического авторитета. Дж. Аззуни полагает, что любое разумное рассмотрение обозримости должно быть таким, в котором признается, что «групповая практика обоснования, в которой свидетельство играет неустранимую роль, встречается в математической практике в гораздо большей степени, чем это признается до сих пор».

Критерий обозримости прямо увязывается Аззуни с активностью по обозримости математической коммуны. Но это означает, что обозримость все еще не является внутренне присущей характеристикой доказательства как критерий обоснованности для истинности доказательства.

Как бы то ни было, понятие априорного гарантированного утверждения покрывает все эпистемические требования к понятию математической истины, как это и утверждает приведенное выше определение. Априорность тут понимается как осознание факта принадлежности к системе вер, так что не требуется эмпирической проверки. Принадлежность к системе определенного математического утверждения осознается или посредством предъявления доказательства, которое является важнейшим математическим свидетельством, или же проверкой уже имеющегося доказательства, или же посредством веры, основанной на свидетельстве математического авторитета. Этот перечень эпистемических гарантий не может быть расширен добавлением эмпирических элементов, поскольку это меняло бы характер априорных гарантированных утверждений. Эпистемическая гарантия есть уверенность в достоверности полученного знания. Такая уверенность имеется в случае компьютерного доказательства, однако компьютерные доказательства выходят за пределы перечня эпистемических требований к понятию математической истины. Фактически компьютерные вычисления суть свидетельство того, что существует некоторое доказательство. Это чисто экзистенциальное доказательство, поскольку математическое сообщество в целом не сможет проверить порождаемое компьютером доказательство.

По этой причине компьютерные доказательства должны рассматриваться в эпистемическом плане как нечто такое, что выходит за стандарты, принятые в математическом сообществе. Вполне допустимо, что хотя компьютерные доказательства будут занимать все более важное место в математической практике, их эпистемический статус будет более «ущербным», чем соответствующий статус традиционных математических доказательств, признанных математическим сообществом. Подтверждением этого является то обстоятельство, что в математическом сообществе нет консенсуса относительно того, доказана ли, например, теорема о 4- красках, поскольку многие математики отказываются считать компьютерное доказательство подлинным математическим доказательством. Для понимания различия эпистемических статусов традиционного доказательства и компьютерного доказательства Аззуни рассматривает следующий мысленный эксперимент. Предположим, что некоторый математик обнаружил контрпример теореме о 4-красках. Ясно, что его выкладки будут тщательно проверяться, и представим себе, что они в конце концов окажутся правильными. Тогда, видимо, математики займутся более тщательной проверкой компьютерного доказательства, и предположим также, что их усилия не приведут к обнаружению ошибок в этом компьютерном доказательстве, хотя и займут значительное время. Тогда можно говорить о двух сценариях: либо математика будет признана противоречивой, что, впрочем, маловероятно, либо компьютерное доказательство будет признано ошибочным, хотя и в нем трудно будет обнаружить предполагаемую ошибку. В результате к компьютерным доказательствам будут относиться более осторожно и их эпистемический статус как достоверных утверждений будет занижен. Более того, в этом случае компьютерные доказательства будут отнесены к сфере эмпирического знания.

Математический авторитет

Как уже говорилось, особенностью подхода Аззуни является то, что он пытается приспособить некоторые черты обозримости доказательства в терминах локальной обозримости, хотя более естественно рассматривать глобальную обозримость. Аззуни начинает с тех ушедших времен, когда все доказательства были обозримыми, а сейчас есть компьютерные доказательства, которые необозримы. Он полагает, что любое разумное рассмотрение обозримости должно быть таким, которое признает, что «групповая практика обоснования, в которой свидетельство играет неустранимую роль, встречается в математической практике в гораздо большей степени, чем это признается до сих пор».

Аззуни строит последовательную цепь определений математического оправдания: индивидуальное априорное обоснование – вывод, который обозрим. *A* не только обозревает доказательство, но и понимает следствия того, что обозримо им.

Это скорее апеллирует к локальной обозримости, так как есть осознание того, что шаги в доказательстве совмещаются в некотором порядке, чтобы доказать тот или иной результат. В некотором смысле, если иметь в виду последнее замечание, определение Аззуни все-таки минимально глобально, но это условие введено во избежание странных контрпримеров.

До сих пор понятие математического авторитета оставалось необъясненным. С первого взгляда кажется, что этим понятием обозначается реальный человек, который многими интересными результатами заслужил такое доверие в математическом сообществе, что его утверждения имеют выделенный эпистемический статус, а именно, статус «практически» достоверных утверждений. Практическая достоверность отличается от достоверности теоретической тем, что первая допускает исключения, которые маловероятны, но тем не менее не могут не учитываться. Другими словами, имеется некоторая достаточно малая вероятность того, что утверждение, провозглашенное авторитетом как истинное, окажется все-таки ложным. Таким образом, понятие математического авторитета, трактуемого буквально, содержит в себе вероятностные элементы. Однако понятие математического авторитета не следует трактовать в таком буквальном духе, потому что речь идет об эпистемической характеристике, претендующей на безличное применение. Тем более, что в истории математики есть много примеров того, как великие математики допускали ошибки.

Ранее было сказано, что обозримость доказательства достигается за счет математического авторитета. Ясно, что в этом случае личностный авторитет не совпадает с эпистемическим авторитетом, поскольку именно человеческая ограниченность является препятствием на пути обозримости сложных доказательств. Связь этих понятий становится очевидной в свете интересного мысленного эксперимента, выраженного в виде притчи. Т.Тимошко приводит следующую гипотетическую историю. Она касается мифического сообщества марсианских математиков и открытия ими нового метода доказательства «Симон сказал». Предполагается, что марсианские математики были весьма похожи на земных математиков, пока на Марсе не появился математический гений Симон. Симон доказал множество новых результатов более или менее традиционными методами, но через некоторое время он начал обосновывать новые результаты такими фразами, как: «Здесь слишком длинное доказательство, чтобы его можно было приводить в данной статье, но я проверил его сам». Поначалу Симон использовал такой прием только в случае лемм, которые, хотя и были важными, все-таки носили комбинаторный характер. Позднее он начал распространять этот прием на более абстрактные леммы и даже на сами теоремы. Весьма часто марсианские математики могли реконструировать результаты Симона в том смысле, что находили их удовлетворительные доказательства. Но в некоторых случаях они этого сделать не могли. Однако столь велик был авторитет Симона, что марсианские математики принимали его результаты, и в таких случаях они шли под рубрикой «Симон сказал» [6].

Прежде всего возникает вопрос, имеет ли такая притча хотя бы слабый оттенок реальности. На самом деле в реальной земной математической истории имеется персонаж, подобный Симону, – это Рамануджан, который часто приводил весьма интересные математические результаты без доказательства. В некотором отношении он был даже более радикален, чем Симон, поскольку не знал, что такое собственно доказательство.

Утверждения Рамануджана оказывались по большей части истинными, но поскольку он не приводил доказательств, статус этих утверждений сходен со статусом утверждений «Симон сказал». Действительно, Симон говорил, что его результат правилен, а Рамануджану результат диктовала богиня Наматжири. Но иногда богиня ошибалась, а ошибающееся божество, таким образом, подверженное эмпирическим ограничениям, мало напоминает божество Пифагора, которое мыслит дедуктивно.

Между Рамануджаном, Симоном и Пифагором при одной интерпретации можно найти сходство: мы можем говорить, что во всех трех случаях мы имеем дело с непостижимым проникновением в суть математики. Это, безусловно, мистическая точка зрения, поскольку непостижимость не обещает рационального исследования процесса дедукции. С этой точки зрения доказательство как рациональный аргумент не является непременным атрибутом математического открытия. Но подобного рода мистицизм при всей его привлекательности, таинственности и сверхъестественности должен уступить место рациональному подходу. В этой связи следует напомнить, что Пифагор был той самой фигурой, с которой начинается рационалистическое освоение духовного мира, и математика с ее нарождающейся дедуктивной структурой была главным источником такого рационализма. Б. Рассел говорит по этому поводу следующее: «Начавшееся с Пифагора сочетание математики и теологии характерно для религиозной философии Греции, Средневековья и Нового времени вплоть до Канта. До Пифагора орфизм был аналогичен азиатским мистическим религиям. Но для Платона, св. Августина, Фомы Аквинского, Декарта, Спинозы и Канта характерно тесное сочетание религии и рассуждения, морального вдохновения и логического восхищения тем, что является вневременным, – сочетание, которое начинается с Пифагора и которое отличает интеллектуализированную теологию Европы от более откровенного мистицизма Азии… С Пифагора начинается вся концепция вечного мира, доступного интеллекту и недоступного чувствам» [7].

Сопоставление Симона и Пифагора может быть продолжено. Пусть, говорит Тимошко, Симон является религиозным фанатиком, который считает, что истинный верующий, произнося математические утверждения, всегда говорит истину. Пифагор был основателем религии и одновременно основателем математической школы. Но даже по времени эти стороны его деятельности были разнесены: как свидетельствует Аристотель, «сперва он занимался науками и числами, впоследствии же, подражая Ферекиду, стал также чудотворцем» [8]. Таким образом, у Пифагора чудеса и математика разделены, а соединение их имеет место не на уровне конкретных математических утверждений, а на уровне философского обобщения природы математики. В случае же Симона-фанатика возникает вопрос о том, какой смысл имеет оценка «Симон сказал»: математический, политический, религиозный? Более общий вопрос состоит в том, является ли гипотетическая марсианская математика допустимым развитием стандартной математики.

Безусловно, мы отрицаем, что «Симон сказал» является тем, что мы хотели бы иметь в виду, говоря об «авторитете». Очевидно, что это понятие более сложное, включающее социологические и психологические факторы. Эпистемические характеристики тут присутствуют лишь в той степени, в какой мы можем говорить о гарантированной истинности математического утверждения. В целом тогда эта проблема относится к классической эпистемологии при прослеживании источника истинности утверждения. Одна из теорий современной эпистемологии делает упор на надежности такого источника – это так называемый релайэбилизм.

Релайэбилизм как адекватная теория познания для математики

Релайэбилизм есть подход к природе познания и обоснованной веры. В отношении обоснования релайэбилизм – это доктрина о том, что вера обоснована, если и только если она есть продукт надежного психологического процесса в том смысле, что этот процесс дает высокую пропорцию истинных вер. Релайэбилизм не требует, чтобы обладатель обоснованной веры знал, что вера обоснована надежно. Знание о надежности процесса необходимо для знания того, что вера обоснована, но вера может быть обоснована без того, чтобы субъект знал об этом. Одно из главных преимуществ релайэбилизма состоит в том, что уверенность в обладании знанием не подвергается оспариванию с помощью сильных скептических аргументов. Для того чтобы получить обоснованную веру, вовсе не нужно опираться на непогрешимые процессы; – с точки зрения релайэбилизма требуется лишь уверенность в надежности процесса.

Релайэбилизм представляет собой менее «академическую» версию эпистемологии в том смысле, что исключает разного рода экзотические гипотетические возможности, которые особенно свойственны возражениям против крайних вариантов скептицизма. В этом смысле он часто рассматривается как версия так называемого натурализма. Натурализм в эпистемологии есть сведение нормативных эпистемических свойств к естественным, неэпистемическим свойствам и отношениям. Действительно, нормативное свойство «обоснованность» сводится к психологическому процессу. Психологический процесс в натурализованных версиях релайэбилизма не рассматривается в отрыве от понимания того, что представляет собой субъект. Им может быть физическая или биологическая система. Эпистемические процессы в субъекте интерпретируются как продукт естественных процессов или действия естественных механизмов. Психологические операции, процессы или механизмы могут быть концептуализированы как устройства с входом и выходом, причем эти устройства представляют собой обоснованные веры.

В интересующем нас контексте релайэбилизм представлен информационно-теоретическим подходом, в рамках которого когнитивная система рассматривается как система обработки информации. Знание, что *a* есть *Φ*, приобретается субъектом в том случае, когда система воспринимает информацию, что *a* есть *Φ*, т. е. когда система принимает такой сигнал, который устраняет все потенциальные контрпримеры. В просторечии это означает получение надежного сигнала, исключающего иные интерпретации, кроме самой вероятной.

Релайэбилизм важен для понимания ситуации с компьютерными доказательствами. Дело в том, что компьютерное доказательство выступает в качестве математического авторитета. Ведь смысл притчи о Симоне состоит и в том, что его авторитет сходен с компьютерным авторитетом: в обоих случаях «утверждения» непроверяемы. Другими словами, мы должны иметь соответствующие веры в истинность утверждений как Симона, так и компьютера, поскольку ситуации и впрямь кажутся полностью параллельными. Однако на практике мы не считаем утверждения Симона обоснованными, в то время как определенная степень доверия к компьютерным доказательствам имеется. То есть компьютерные утверждения мы считаем эпистемически обоснованными. Такое различное отношение к двум типам вер может не быть понятным в рамках ряда концепций эпистемологии. Однако с точки зрения релайэбилизма это различное отношение вполне понятно. Утверждения Симона не являются надежными, в то время как «утверждения» компьютера надежны. Если прибегнуть к более точной терминологии, компьютер не просто надежен, – он обоснованно надежен. Безусловно, компьютер как физическая машина может ошибаться, в программы может вкрасться ошибка, но если когнитивная система, понимаемая как устройство для обработки информации, демонстрировала свою надежность самым различным образом, то этого достаточно для признания утверждений компьютера эпистемически обоснованными. В натурализованной эпистемологии в ее релайэбилистской версии принимаются во внимание не столько эпистемологические свойства утверждения, сколько их естественные аналоги, например вероятность того, что утверждение является истинным.

Следует заметить, что в натурализованной эпистемологии мы по-другому рассматриваем соотношение формализованных доказательств и соответствующих компьютерных вычислений. Обычно мы полагаем, что именно формализация, точнее, ее принципиальная возможность, есть основание для обращения к компьютерам и, в конце концов, основание для веры в правильность компьютерных вычислений. Однако с точки зрения релайэбилизма ситуация совершенно иная: мы доверяем когнитивному устройству – в данном случае компьютеру. Неверным будет предполагать, что компьютер просто прослеживает шаги сложного доказательства, которое уже существует. Некоторые математики уверены в том, что следует искать «настоящее» доказательство теоремы о 4-красках, доказательство, которое не опиралось бы на компьютеры, по той причине, что компьютер просто выполняет для человека сложную работу. На самом деле, наше единственное свидетельство о существовании этого формального доказательства предполагает надежность компьютера.

Т. Тимошко делает интересное наблюдение в отношении того, можно ли утверждения Симона сделать эпистемически обоснованными [9]. Например, марсианские математики могли бы считать, что даже утверждения Симона в принципе формализуемы, а непостижимость для них этих утверждений состоит в огромной сложности такой формализации. Ведь то же самое происходит в случае компьютерных доказательств, когда мы не можем в принципе проследить детали доказательства. Другими словами, надо признать, что формализация в данном случае отнюдь не первична. Таким образом, формализуемость, пусть даже и принципиальная, не может быть способом оправдания эпистемической обоснованности утверждений Симона. Математический авторитет происходит из надежности соответствующей когнитивной системы.

Но надо признать, что релайэбилизм не является общепринятой эпистемологической теорией. Больше того, при обсуждении традиционного образца доказательства трудно понять, какого рода надежность должна иметься в виду, если речь идет о постижимости обозримого доказательства. Традиционное доказательство прибегает к авторитету в том смысле, что в силу ограниченности места для изложения постоянно делаются ссылки на другие работы. Но в принципе такие ссылки не необходимы и можно вообразить или воспроизвести вполне обозримое доказательство. В случае же Симона или компьютера оба выступают неустранимыми авторитетами уже в силу необозримости сложных доказательств. Но даже если мы и не принимаем релайэбилизм, все равно параллель между Симоном и компьютером весьма ограниченная. В конце концов надежность должна основываться на доказательствах, которые подтверждаются раз за разом. В случае Симона нет косвенных свидетельств в пользу истинности его утверждений, за исключением предыдущего положительного опыта. Но подобный индуктивный ряд вряд ли может быть надежным эпистемическим критерием.

Именно это обстоятельство Тимошко кладет в основу своей аргументации относительно того, что компьютерные доказательства вводят в математику новый метод: «Так как мы склонны принять апелляцию к компьютерам в случае теоремы о 4-красках и отвергнуть апелляцию к Симону в гипотетическом примере, мы должны допустить свидетельства в пользу надежности компьютеров в философское объяснение доказательств, сделанных с помощью компьютеров…. Какими бы ни были эти свидетельства, они не могут принять форму традиционного обозримого доказательства. В противном случае Аппель и Хакен представили бы это доказательство и вообще избавились бы от апелляции к компьютерам. Следовательно, апелляция к компьютерам вводит в математику новый метод» [10].

Параллель между «Симон сказал» и компьютером, по утверждению Детлефсена и Лукера, может быть интерпретирована в противоположном, нежели это предполагает Тимошко, смысле [11]. Все дело в том, что подразумевается под обозримостью. С одной стороны, это пошаговый процесс, т. е. локальная обозримость. С другой стороны, это некоторого рода озарение, т. е. глобальная обозримость. Как уже было сказано выше, «Симон сказал» не может быть представлено в форме традиционного доказательства. Но может ли озарение, то есть глобальная обозримость, быть представлено в форме традиционного доказательства? С точки зрения марсианской математики истинность того, что «Симон сказал», определяется надежностью авторитета, но именно эта надежность и ставится под сомнение ввиду многих факторов. Однако точно так же можно поставить под сомнение надежность глобальной обозримости. Известно много примеров того, как ошибались самые признанные математические авторитеты.

Поскольку надежность глобальной обозримости не может быть исчерпана доказательством, возникает вопрос, не является ли апелляция к такой обозримости введением в математику нового метода. В этом вопросе используется параллель между надежностью компьютера и надежностью глобальной обозримости. Конечно же, глобальная обозримость не может рассматриваться как новый метод в математике, поскольку она свойственна тому самому традиционному доказательству. Но тогда надо признать, что и компьютерные доказательства не представляют собой новых методов по сравнению с традиционными.

Ранее мы сопоставляли эмпирические и априористские элементы в доказательстве. Наличие эмпирических элементов в компьютерном доказательстве может быть признано как эпистемическое свойство, которое в определенном смысле присуще и традиционному доказательству. Гораздо более радикальным представляется наличие в доказательстве вероятностных элементов. Действительно, «вывод теоремы или проверка доказательства имеет только вероятностную значимость. Нет никакого различия с точки зрения инструмента вывода или проверки: им может быть человек или машина. Вероятности могут варьироваться…» [12].

Вероятностные методы

Основные возражения ряда математиков против признания компьютерных доказательств «настоящими» доказательствами заключаются в том, первые рассматриваются как доказательства с некоторой вероятностью. Между тем традиционное доказательство попросту не может быть «с некоторой вероятностью», поскольку утверждение доказывается с достоверностью. Понятие математической достоверности исключает всякое представление о вероятности. Таков традиционный и устоявшийся взгляд на природу математического доказательства.

Тем не менее до сих пор никто не занимался сопоставлением эпистемического статуса математической достоверности и вероятностных утверждений. Сопоставление шло по пути признания несовместимыми априористской трактовки математических утверждений и принятия их эмпирических элементов. Связь эмпиризма и вероятности очевидна, но тем не менее она не исчерпывает проблемы, связанные с эпистемическим статусом, скажем, компьютерных доказательств.

Природа математических утверждений связывается с дедуктивным методом, который объявляется единственным достоверным методом получения математических истин. И хотя статус компьютерных доказательств, по общему признанию, отличен от статуса традиционного доказательства, тем не менее, компьютерное доказательство является реализацией дедуктивного метода, будучи формальным выводом одних утверждений из других. Гораздо более радикальный отход от понятия традиционного доказательства имеет место в случае, когда говорится о получении математических результатов помимо дедуктивного метода. Если такой метод имеется, то возникает вопрос, в какой степени он эпистемически ущербен или же равноправен по сравнению с эпистемическими стандартами традиционного доказательства. Такой метод, как будет показано, связан с вероятностными способами получения математических истин. Если можно установить эпистемическое равноправие, тогда имеют ли математики право отвергать вероятностные методы как средства установления истинности математических утверждений?

Все дело в том, как понимать доказательство. Традиционно доказательством считается то, что математик может «сделать» карандашом на бумаге. Компьютерное доказательство не подпадает под такое понимание, поскольку физически невозможно выписывание тех «выкладок», которые делаются компьютером. Но тем не менее это все-таки доказательство, и оно находит все большее применение в математической практике. Можно сделать и следующий шаг, включив в разряд доказательств и другие методы. Важно подчеркнуть, что принятие или неприятие таких методов, если они вообще существуют, есть дело математического сообщества. Как и в случае компьютерных доказательств, важно предположить, что имеется, по крайней мере в принципе, возможность удостовериться в том, что это все-таки доказательство. Нас же в данном отношении интересует проблема эпистемического статуса подобных новых методов получения математических истин. Весьма интересные предложения в этом направлении сделаны Д. Фаллисом, который основывался на ряде результатов в области технологии ДНК [13].

Технология получения математических вероятностных истин

Как и в случае компьютерных доказательств, новые методы в математике связаны с комбинаторными проблемами. Одна из таких проблем заключается в определении существования гамильтонова пути в направленном графе. Направленный граф можно представить в виде группы городов, соединенных дорогами в одном направлении. Путь есть последовательность городов, такая, что каждый город связан с другим городом однонаправленной дорогой. Гамильтонов путь (HP) есть путь, который проходит через каждый город точно один раз.

Традиционное доказательство несуществования НР в направленном графе состоит в простом переборе всех возможных путей на предмет их гамильтонова свойства. Если перебор становится слишком большим для физических возможностей человека, можно поручить его компьютеру. Если отвлечься от всех сомнений, связанных с компьютером как физической машиной, то мы все еще имеем детерминистский алгоритм решения проблемы. Дело, конечно, в степени влияния эмпирических обстоятельств на нахождение доказательства. Есть ли такой метод, в котором эмпирические элементы настолько важны, что такое доказательство радикально отличается от дедуктивного?

Л. Эйдлмен использует для решения комбинаторных проблем технологию ДНК [14]. Далее в изложении технических деталей мы следуем Д. Фаллису. Поскольку ДНК представляет собой кодирующее устройство, ее можно использовать для решения комбинаторных задач. В частности, в проблеме нахождения гамильтонова пути в направленном (*ориентированном*?) графе узлы графа (города) можно представить некоторым фрагментом ДНК, а *ребра*(?) графа (путь от города к городу) – соединением части фрагментов, представляющих соседние города. Как известно, двойная спираль состоит из четырех оснований, которые стандартно обозначаются через A,T,G,C. Основание A соединяется только с основанием T, основание G - с основанием C, а двойная спираль соединяется только в виде инверсных друг другу фрагментов. Например:

C T T G A G
G A A C T C

Пусть некоторый город представлен следующим фрагментом ДНК, состоящим из 20 оснований:

GCTATTCGAGCTTAAAGCTA

Другие города представлены другими фрагментами ДНК, и для образования пути через города их нужно соединить.

Эта проблема решается путем запуска в пробирку огромного числа фрагментов, представляющих дорогу. Каждая дорога представлена фрагментом из 20 оснований. Каждый такой фрагмент устроен так, чтобы связать вместе два фрагмента, представляющих два города, которые соединяются дорогой. Например, предположим, что имеется дорога от города *X* к городу *Y*. Первые 10 молекул этой дороги есть инверсные молекулы последних молекул города *X* и инверсные молекулы первых десяти молекул города *Y*.

Город *X* Город *Y*

==================== ====================

GCTATTCGAGCTTAAAGCTA | GGCTAGGTACCAGCATGCTT

GAATTTCGAT CCGATCCATG

=====================

Дорога от *X* к *Y*

В результате эта дорога может служить в качестве «молекулярной шины», которая держит вместе города *X* и *Y* [15].

Фрагменты городов и дорог образуют двойную спираль. Одна ветвь двойной спирали состоит из фрагментов городов, связанных концами, и эта ветвь представляет собой путь через граф. Для завершения первого шага алгоритма реакция лигатуры связывает фрагменты городов вместе, для того чтобы после разделения молекул ДНК дорога не распалась.

Второй шаг, электрофорез в геле, разделяет ДНК по длине. Остаются только молекулы длиной $N \cdot 20$. Другими словами, остаются только те нити (фрагменты), которые представляют собой пути, проходящие через *N* городов.

Третий шаг: пробирка нагревается до распада двойной спирали на отдельные нити ДНК. Затем намагниченные копии инверсных нитей, представляющих первые города в графе, добавляются в пробирки. Намагниченные инверсные нити образуют связи с отделенными нитями ДНК. Эти связи будут осуществлены только с теми нитями, которые представляют собой пути через первый город. Далее магнит, приставленный к пробирке, оставляет в ней только эти пути, а остальные удаляются. Эта процедура повторяется для всех городов в графе. В результате подобного рода манипуляций в пробирке остаются только те пути, которые проходят через каждый город в графе [16].

Фактически речь идет о реализации следующего алгоритма:

1) порождение всего множества путей через граф;

2) изъятие всех путей, за исключением тех, которые проходят точно через *N* городов;

3) изъятие всех путей, за исключением тех, которые проходят через каждый город.

В целом процедура сводится к изъятию всех путей, которые не являются гамильтоновыми путями. Если при реализации всех трех шагов не обнаружится фрагментов ДНК, представляющих какой-либо путь, тогда делается вывод о том, что в данном графе нет гамильтонова пути. Формулировка подобного рода претендует на звание теоремы, поскольку имеет вид математического результата. Парадоксальность ситуации заключается в том, что математический результат «доказывается» полностью эмпирическими средствами.

Эмпирические процедуры подвержены ошибкам в такой степени, что с первого взгляда подобное «доказательство» математического результата кажется просто неправдоподобным из-за своей погрешимости. Однако, как и прежде, мы можем говорить в духе релайэбилизма, что погрешимость погрешимости рознь. Дело в том, что генная инженерия достигла такой степени надежности, что можно вполне доверять предсказуемым результатам. Можно, например, сомневаться в том, что шаг (1) из перечня, приведенного выше, не будет реализован и у нас в пробирке не будет всех возможных путей. Подобный сбой в эмпирической процедуре может привести к такой ситуации, когда на самом деле в графе имеется гамильтонов путь, но отсутствие соответствующего фрагмента ДНК не позволяет сделать правильное заключение. Эмпирическая ошибка ведет в таком случае к заключению, которому приписывается математическая правдоподобность, хотя и не математическая определенность. Однако, как уже сказано выше, особенности генной инженерии таковы, что эта возможность имеет весьма малую вероятность: в опыте используется огромное число фрагментов ДНК для каждого города. Таким образом, как и в случае компьютерного доказательства, мало у кого есть сомнения в том, что эмпирические ошибки могут быть препятствием к признанию соответствующего утверждения истинным. Проблема же заключается в том, что эпистемологические характеристики такого доказательства на первый взгляд радикально отличаются от соответствующих характеристик в случае традиционного доказательства.

Традиционное доказательство представляет собой путь к пониманию того, почему доказываемая теорема истинна. Уже компьютерному доказательству предъявляется упрек в том, что оно не дает такого понимания. В случае же ДНК-«доказательства» этот упрек становится еще более жестким: физический эксперимент никак не может дать нам основания для дедуктивного заключения. Правда, стоит отметить, что комбинаторные проблемы, для решения которых и применяются компьютерные и другие эмпирические технологии, в математике стоят несколько особняком. Фаллис цитирует в связи с этим Харди: «…Вопреки крайней специфичности формулировки и доказательств» таких комбинаторных проблем, они, тем не менее, являются подлинной математикой и подчиняются тем же стандартам доказательства». Последние слова в этой цитате наиболее важны в данном контексте. Если комбинаторные проблемы подчиняются тем же стандартам доказательства, что и остальные математические проблемы, тогда надо показать, что эпистемологические характеристики для обоих типов доказательства – традиционного и «эмпирического», или вероятностного, различаются не столь сильно.

Это представляет собой довольно трудную задачу. Математические теоремы доказываются с математической определенностью, свойственной лишь дедуктивным конструкциям. Возможно ли представить себе математическое утверждение, истинность которого оценивалась бы с некоторой вероятностью? Аппель и Хакен признавали, что доказанная ими теорема истинна с вероятностью 99,99… . С точки зрения традиционного понимания доказательства это полный нонсенс, поскольку математическое доказательство либо истинно, либо ложно. И тем не менее имеет смысл поставить вопрос о том, нельзя ли расширить понимание природы доказательства таким образом, чтобы вероятностное доказательство не уступало традиционному доказательству с точки зрения эпистемических добродетелей.

Расширение понятия доказательства

Конечно, все определяется математической практикой. Некоторые математические утверждения, полагаемые истинами, т. е. теоремы, требуют определенного расширения. Действительно, рассмотрим теорему о классификации конечных групп. Для нее понятие доказательства резко отличается от традиционного понятия доказательства. В теории простых конечных групп сформулирована одна из основных проблем алгебры, а именно, проблема классификации этих групп. Два аспекта этой проблемы представляют интерес для математиков, работающих в других областях. Один – серия открытий «монстров». Это простые группы, о существовании которых не подозревали до 1966 г., когда их открыл З. Янко, что привело к созданию современной теории спорадических групп. Как выразился один из математиков, «существование этих странных объектов, которые открывают по штуке в год, показало богатство предмета и создало атмосферу таинственности в отношении природы простых групп».

Группа Янко имеет 175560 элементов. За ее открытием последовала дюжина других. Самая большая группа из этого перечня – «монстр Фишера» имеет порядок $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 59$...

Исследователи конечных простых групп полагают, что фактически закончили работу по классификации этих объектов. Методологические проблемы, возникающие в этой связи, примечательно схожи с проблемами компьютерного доказательства. «В настоящее время определение всех конечных групп почти завершено. Такое утверждение явно самонадеянное, если вообще не бессмысленное, так как никто не говорит о теоремах как “почти доказанных”. Но окончательная теорема, которая утверждает классификацию простых конечных групп, не похожа ни на какую другую теорему в истории математики. Потому что полное доказательство, если оно будет получено, займет более 5000 журнальных страниц! Больше того, вполне вероятно, что в настоящее время более 80% этих страниц существует либо в виде публикаций, либо в виде препринтов» [17].

Традиционная проверка доказательства состоит в том, что достаточно терпеливый человек может его проработать и убедиться в его правильности. Но когда длина доказательства достигает тысяч страниц, найти такого достаточно терпеливого человека будет трудновато. Тут нужно будет привлекать целую бригаду терпеливых людей и надеяться на то, что при их общении не проскользнет ошибка.

Но дело не просто в длине доказательства, а еще и в его точности. Вот что пишет по этому поводу Д. Горенштейн: «Здесь очень уместно добавить предупреждение относительно значения термина “доказательство” в этом контексте. Потому что тщательная проверка аргумента в сотни страниц находится за пределами человеческих возможностей. Я говорю не о неизбежных типографских ошибках и не об общем концептуальном базисе доказательства, а о “локальных аргументах”, которые не совсем оправданны, – об оговорках, пробелах. Можно всегда исправить их, но существование таких “временных” ошибок по крайней мере неудовлетворительно. В самом деле, они поднимают следующий основной вопрос: если аргументы часто имеют характер ad hoc, то как можно гарантировать, что “сито” не упустит конфигурацию, которая приведет к еще одной простой группе? К несчастью, нет никакой гарантии, – нужно просто примириться с этими реалиями. Однако превалирует ощущение, что при таком количестве участников разработки проблемы и таком длительном времени каждая значительная конфигурация находится под бдительным взором математиков и вряд ли что-либо может остаться незамеченным. С другой стороны, это ясно указывает на жесткую необходимость постоянного пересмотра существующих “доказательств”. Это особенно верно в то время, когда провозглашается окончательная классификация конечных групп и уже начинается выход на более плодотворные области. Некоторые из преданных членов сообщества должны оставаться для улучшения “текста”. Это будет одной из основных задач “постклассификационной” эры» [18].

Что касается «сотворенных рукой» доказательств типа компьютерного доказательства, то тут нужно осознавать возможность ошибок в математическом мышлении. В обоих случаях, тем не менее, надо иметь чувство, основанное на видении проблемы в целом, что неполные или ошибочные доказательства могут дать правильный ответ.

Если программа, описанная Горенштейном, будет выполнена и если результаты ее будут приняты математическим сообществом как значимые или заключительные, то чем это отличается от принятия компьютерных доказательств, скажем, теоремы о четырех красках?

Когда доказательство занимает более 5000 страниц и осуществлено по частям многими математиками, тогда становится ясно, что заявление такой команды о доказательстве основано существенно на взаимном доверии к компетентности и честности друг друга. А принятие работы математическим сообществом основано в целом на доверии к членам команды.

Это взаимное доверие основано на вере в социальные институты и структуру математического сообщества. Принятие компьютерного доказательства теоремы о четырех красках основано на вере в то, что компьютеры делают то, что им положено. В обоих случаях остается место для некоторых сомнений, некоторой возможности ошибок.

Теорема о четырех красках выглядит исключительной из-за использования компьютеров. Классификация простых конечных групп выглядит исключительной из-за длины доказательства. Но между этими примерами и типичными доказательствами и теоремами, которые регулярно публикуются в журналах, нельзя провести различия.

Эпистемический эффект компьютерного доказательства

Математики в каждой области полагаются на работы друг друга. Взаимное доверие, которое позволяет им делать это, основано на доверии к социальной системе, частью которой они являются. Они не ограничивают себя использованием результатов, которые они сами могут получить из первых принципов. Если теорема опубликована в респектабельном журнале, если имя автора известно, если теорема цитируется и используется другими математиками, тогда она считается установленной. Всякий, кто использует ее, имеет право на это.

Такое взаимное доверие совершенно разумно и уместно. Но оно определенно нарушает понятие математической истины как истины неоспоримой. В чем, собственно, состоит эпистемический дефект доказательства теоремы о четырех красках и теоремы о классификации конечных групп? В силу того, что это доказательство не может быть проверено человеком и, таким образом, не является обозримым и постижимым, оно не является математически определенным (или математически достоверным). Математическая достоверность, или определенность, в данном случае противопоставляется вероятностному доказательству или же доказательству эмпирическому. Надо сразу оговориться, что термины «вероятностное доказательство» и, в большей степени, «эмпирическое доказательство» представляют собой терминологическую помощь в попытках расширения понятия доказательства, о которых говорилось выше. Безусловно, подлинным доказательством является дедуктивное доказательство. Дедуктивный аргумент рассматривается математиками и многими философами как единственный способ установления истинности математического утверждения. Но опять-таки математики не имеют права отвергать вероятностные методы как средства установления истинности математических утверждений. В конце концов, эпистемические недостатки традиционных методов доказательства отнюдь не менее весомы, чем эпистемические недостатки вероятностных методов. В самом деле, априоризм отвергается многими философами, в то время как это эпистемическое свойство универсально приписывается дедуктивному доказательству.

Безусловно, если мы примем в качестве допустимых вероятностные доказательства, нам придется ввести веса для различных доказательств. Скажем, можно предположить, что метод доказательства, использующий технологию ДНК, менее надежен, чем процессор «Пентиум». Надежность физических устройств определяется временем отсутствия явной ошибки. Но в случае теоремы о классификации конечных групп мы верим в ее истинность почти на тех же самых основаниях. В самом деле, как признает Горенштейн, «вероятно, наилучшим свидетельством значимости теоремы о классификации является тот факт, что никакой простой группы не было обнаружено после завершения доказательства» [19].

Вообще, надо согласиться с тем, что хотя мы и принимаем веса в признании доказательства законным, это вряд ли может играть кардинальную роль в нашем неприятии вероятностных доказательств по сравнению с традиционными методами. Дело в том, что само понятие вероятностного доказательства можно трактовать в зависимости от того, может ли быть достигнута математическая определенность при соблюдении некоторых условий. Точнее, речь идет об условной математической определенности. Д. Фаллис упоминает в этой связи вероятностный тест на простые числа Рабина [20]. Было доказано, что если n есть составное число, тогда больше половины чисел между 1 и n показывают составной характер. Метод Рабина использует этот факт. Мы выбираем случайным образом числа между 1 и n и подвергаем их тесту. Если n – составное, то подавляющая часть чисел свидетельствует о составном характере n. В результате если ни одно из тестируемых чисел не свидетельствует о составном характере n, тогда перевес на стороне того, что n простое число.

Хотя математики не считают этот метод приемлемым для установления простоты числа, все же они полагают, что метод Рабина надежен. Более того, они полагают, что он даже более надежен, чем любой детерминистический метод проверки простоты числа [21].

Итак, дело не в недостаточной определенности вероятностных методов, а в том, что они не дают *правильного* вида определенности. Не дающие абсолютной определенности методы, приемлемые для математиков, не обеспечивают безусловной гарантии, но они обеспечивают *условную гарантию* того, что математическое утверждение истинно. Эти методы включают в себя выполнение таких процедур, что если процедура выполняется правильно, тогда математическое утверждение должно быть истинным.

Например, в случае генной инженерии мы имеем условную гарантию того, что в данном направленном графе не существует гамильтонова пути. Тут возможны ошибки как в оборудовании, так и в программе. Если же таких ошибок нет, тогда в графе такого пути не существует. Далее, выписывание вывода в логике первого порядка (начиная со стандартных математических аксиом) есть такая процедура, что если она выполняется правильно, тогда математическое утверждение должно быть истинным. Но вероятностный метод не обеспечивает даже условной гарантии. Даже если технология ДНК выполняется надлежащим образом, все еще может быть гамильтонов путь. В частности, мы можем потерпеть неудачу и не получить ни одной нити ДНК, представляющей собой гамильтонов путь даже в начале эксперимента.

Эпистемическая значимость условной математической определенности

Но имеет ли обеспечение условной определенности важное эпистемическое значение? На самом деле условная определенность равнозначна утверждению простого условия, что если соблюдены некоторые процедуры, то математическое утверждение доказано с математической определенностью. В математической практике методы, предусматривающие условную математическую определенность, весьма распространены, но во многих случаях это вопрос скорее практического, нежели эпистемического характера. Так, в этой связи часто упоминают тот факт, что К. Гедель не привел доказательства своей второй теоремы о неполноте, ссылаясь на то, что если правильны предпосылки, то доказательство можно выполнить.

Таким образом, неясно, в какой мере такого рода условная математическая определенность может не считаться дефектом в случае принятой математической практики и считаться таковым в случае эмпирических методов доказательства. Ясно, что помимо общих проблем, связанных с противопоставлением индуктивных методов дедуктивным, тут вряд ли можно усмотреть какие-то существенные эпистемические проблемы.

Общее противопоставление эмпирического и дедуктивного видов знания касается, конечно же, статуса априорного знания, каким, по предположению, является математическое знание. Но при этом возникает вопрос, все ли математическое знание может называться априорным. Мы имеем следующую структуру рассуждения по поводу связи априорности и математической определенности:

Априорное утверждение не зависит от эмпирического опыта.
Априорное утверждение есть проявление математической определенности.
Математическая определенность не связана с эмпирическим опытом.
Эмпирический опыт связан с рациональной неопределенностью.

Из этого набора утверждений делается вывод, что априорное утверждение несовместимо с рациональной неопределенностью. Рациональная неопределенность есть проявление неуверенности в значимости или истинности заключений, сделанных относительно дедуктивных структур. Однако, как утверждает Ф. Китчер, не все методы, приемлемые для математиков, могут быть априорными уже по той причине, что вполне возможно знать, что утверждение априорно, и в то же время не знать, что оно математически определенно [22]. Речь идет об эпистемических обстоятельствах. Человеческое мышление погрешимо, и поэтому вполне допустимо, что в предполагаемом математическом доказательстве сделана ошибка. Это допущение вполне рационально в том смысле, что допущение возможности ошибки есть результат простого эпистемологически разумного наблюдения. Но такого рода осознание собственной погрешимости говорит о том, что наше знание математических утверждений не всегда априорно.

Но всегда ли подобные ошибки ведут к тому, что доказательство математического утверждения лишается математической определенности? Часто случается так, что, несмотря на такие возможные ошибки, доказательство оказывается верным, и тогда в целом наше знание оказывается вполне обоснованным. Таким образом, мы имеем некоторого рода противоречие: с одной стороны, знание априорно, если оно не зависит от опыта, а с другой стороны, такое знание может быть погрешимым. Противоречие возникает по той причине, что оба утверждения относятся к математическим истинам. Оно может быть разрешимым только в том случае, если мы ослабим определение априорности утверждения таким образом, чтобы оно было совместимым с возможной погрешимостью. Это, однако, требует серьезной ревизии общей теории познания.

Примечания

1. См.: *Timoczko T.* The Four-Colour Problem and its philosophical significance // Journal of Philosophy. – 1979. – V. LXXVI, No. 2.

2. *Azzuni J.* Metaphysical myths, mathematical practice. – Cambridge Univ. Press, 1997. – P.156.

3. См.: *Рорти Р.* Философия и зеркало природы. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1997.

4. *Azzuni J.* Metaphysical myths, mathematical practice. – P. 166.

5. Ibid.

6. См.: *Timoczko T.* The Four-Colour Problem … – P. 71.

7. *Рассел Б.* История западной философии. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1997. – С. 51.

8. *Timoczko T.* The Four-Colour Problem … – P. 45.

9. Ibid.

10. Ibid. – P. 72.

11. *Detlefsen M., Luker M.* The Four-colour Theorem and mathematical proof // Journal of Philosophy. – 1979. – V. LXXVI. – P. 803–820.

12. *Davis L.* Fidelity in mathematical discourse: is one and one really two? // American Mathematical Monthly. – 1972. – V. LXXIX. – P. 262.

13. См.: *Fallis D.* The epistemic status of probabilistic proof // Journal of Philosophy. – 1997– V. XCIV. – P. 165–186.

14. См.: *Adleman L.* Molecular computations of solutions to combinatorial problems // Science. – 1994 – V. CCLXVI. – P. 491–497.

15. См.: *Devlin K.* Test tube computing with DNA // Math Horizons. – 1995. – P. 17.

16. См.: *Fallis D.* The epistemic status of probabilistic proof.. – P. 165-186.

17. *Gorenstein D.* – Bulletin of American Mathematical Society. – Jan. 1979.

18. Ibid.

19. Цит. по: *Peterson I.* Islands of truth. – N.Y.: Freeman, 1990. – P. 280.

20. См.: *Rabin M.* Probabilistic algorithm for testing primality // Journal of Number Theory. – 1980. – V. XII. – P. 128–138.

21. См.: *Pomerance C.* Recent developments in primality testing // Mathematical Intelligencer. – 1981. – V. III, No. 2. – P. 97–105.

22. См.: *Kitcher Ph. P.* The nature of mathematical knowledge. – Oxford Univ. Press, 1983. – P. 42–43.

Институт философии и права СО РАН,
г. Новосибирск

***Tselishchev, V.V.* epistemological criteria of proof.**

The epistemological characteristics of mathematic proofs are considered. First of all, the concept of the proof visibility is discussed. Besides the concept of the empiric proof is examined. Finally, the a priori and a posteriori types of proofs are compared.