ЯЗЫКОВЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ*

А.В. Хлебалин

Гамма: Не может ли случиться так, что те самые вопросы, которые оставались за сферой нашего внимания и которые можно сформулировать на этом языке, окажутся существенными позже?

Дельта: Теорема неполноты является первым подтверждением того, что такие вопросы не имеют существенного значения.

Проблемно–ориентированный подход к науке: философия математики как концептуальный прагматизм / Под ред В.В. Целищева. – Новосибирск: Наука, 2001. – С. 11.

Изначальная тесная связь между математикой и философией в XX в. породила комплекс проблем, попытки решения которых оказывали чуть ли не определяющее влияние на развитие аналитической философии. Не только применение идей, возникших в ходе обсуждения конкретных задач оснований математики для решения философских проблем, непосредственно с ней не связанных, но и восприятие математики как абсолютно чистого знания, в точности, строгости и обоснованности которого видели максимальное воплощение возможностей разума, причем масштабы этих возможностей воспринимались чуть ли не как неограниченные в свете безудержного

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Междисциплинарным интеграционным проектом Сибирского отделения РАН № 1 – «Вычислимость и рациональность: исследование сферы применимости тезиса Черча – Тьюринга и понятия эффективного вычисления к проблеме соотношения дедуктивного и эмпирического способов познания когнитивных и физических процессов».

прогресса математики XX столетия, – и то, и другое подтверждает тот факт, что математика и прояснение природы математического знания служили ориентиром для развития англо-американской философии. Эталон математического знания и развитие математической логики, позволившей создать величественные программы оснований математики, претендовавшие на то, чтобы прояснить природу математического знания и заложить прочный фундамент его основания, породили некоторый стандарт того, каким критериям должно отвечать знание вообще. При этом достижение столь высоких стандартов зачастую увязывалось с критикой и исправлением настоящей практики научного исследования, а затем и будничного, вненаучного использования разума. Критика логических и математических «предрассудков», приводящих к таким нежелательным, «скандальным недоразумениям», как теоретико-множественные парадоксы, не ограничивалась сугубо технической сферой математической логики, но требовала более или менее радикальной реформы математического, а как следствие, в целом научного мышления. Например, критика Л.Брауэром классической математики и логики, теория типов Б. Рассела и программа формализации Д. Гильберта в свете развития аналитической философии XX столетия не могут восприниматься как только технические программы, значимость которых не выходит за рамки опять же технических по преимуществу проблем оснований математики. Хорошо известно, что все три классические программы исследования оснований математики – логицизм, формализм и интуиционизм – указывали на фундаментальную роль языка в получении и обосновании математического знания, в частности, связывая решение теоретико-множественных парадоксов с запретом, казалось бы, интуитивно вполне ясных понятий или законов логики («множество всех множеств» в логицизме Рассела или закон исключенного третьего в интуитивизме Брауэра).

При этом подобные запреты на использование определенных языковых выражений или логических законов имели далеко идущие философские следствия, в частности для логического анализа языка математики и науки в целом. Очень скоро стала вполне ясной фундаментальная роль языка для прояснения природы математического знания: коль скоро математика не имеет дела с эмпирически воспринимаемой реальностью, вопросы об истинности математического знания, природе математических объектов и тех критериях, которым должно отвечать обоснованное математическое знание, нужно решать прежде всего средствами логико-философского анализа языка математики. Интересным является тот факт, что при формулировке стандартов математического знания, при решении вопросов о том, в каком смысле математические утверждения являются истинными и какова природа математических сущностей, немаловажную роль играли неявные предпосылки в понимании природы языка и его выразительных возможностей авторами программ философии математики. Приступая к характеристике различий между интуитивизмом и формализмом, Л. Брауэр писал: «Для понимания развития противостоящих друг другу теорий, существующих на этой арене (оснований математики. – *А.Х.*), нужно сначала добиться ясного понимания понятия “наука”…» [1]. Брауэр полагал принципиально важным для понимания специфики программ оснований математики уяснить различие в понимании науки представителями указанных направлений: многое объясняется неявными допущениями в толковании этого, казалось бы, абсолютно ясного и однозначного понятия. На наш взгляд, не менее важным является прояснение аналогичных допущений в понимании и интерпретации феномена языка, присущих представителям различных программ. Мы претендуем на то, чтобы ниже показать в общем виде, что неявные, интуитивно очевидные, но оказывающиеся крайне спорными в ходе их экспликации представления о языке и его выразительных возможностях оказывают гигантское влияние на понимание природы математического знания, специфики математической истины и тех стандартов, которым должно отвечать математическое знание.

На наш взгляд, интересным и необычайно ярким примером влияния подразумеваемых представлений о природе языка на решение проблем философии математики является философия Л. Витгенштейна. Его поздние работы, особенно «Замечания по основаниям математики», не раз оказывались в центре внимания, несмотря на то что среди классических программ оснований математики философия Витгенштейна оказалась безусловным аутсайдером: если развитие программ интуиционизма, формализма и логицизма хотя и не оказало существенного влияния на развитие самой математики, но ни в коем случае нельзя отрицать их принципиально важную роль для развития математической логики, то философия математики Витгенштейна зачастую воспринимается в лучшем случае как «чудачества гения». И виной тому оказывается не только пресловутый «темный» стиль изложения, который позволяет в параграфах «Замечаний» и «Философских исследований» искать себе поддержку представителям различных программ, но и то, что в поздних работах Витгенштейна поразительным образом игнорируются или трактуются как крайне незначительные проблемы и результаты, которые в середине

XX в. представляли собой центральные проблемы математической логики и философии математики, например, вторая теорема Геделя о неполноте. В то же время если общеизвестные проблемы философии математики – природа логического следования, математического доказательства или необходимости математических истин – попадали в сферу внимания Витгенштейна, то рассматривались они не в том ключе, в каком они не решались сторонниками классических программ, а выводы, к которым приходил «гениальный австриец», зачастую просто обескураживали. Эти и многие другие особенности философии позднего Витгенштейна на многие годы локализовали его мысли где-то на периферии философии математики. Конечно, в последние десятилетия интерес к философии позднего Витгенштейна, и, в частности к его философии математики, становится все более значительным. Отчасти он был инспирирован блестящими работами К. Вригта, С.Крипке и П. Хакера.

Среди прочих работ, которые задали новый ракурс рассмотрению сочинений Л. Витгенштейна, выделяются работы Я. Хинтикки. Предложенная Хинтиккой интерпретация взглядов позднего Витгенштейна как представителя того подхода к языку, который он сам обозначил формулой «язык как универсальный посредник», на наш взгляд, позволяет прояснить многие из этих обескураживающих особенностей его философии. Ниже мы предполагаем показать, как распространяется идея Хинтикки на область развития философии математики. Естественно, подробное исследование потребует много больше времени, чем то, которым мы располагаем. Поэтому мы ограничим себя тем, что попытаемся продемонстрировать саму возможность демонстрации влияния неявных предпосылок в отношении языка на философию математики, в качестве примера используя философию математики Витгенштейна.

Calculus ratiotinator и lingua characterica

Я. ван Хейнурт впервые вводит то различие в понимании логики, характерное для XIX и XX вв., которое позже Я. Хинтикка распространил за пределы формальных языков на сферу языка в целом. Первым это различие использовал Г. Фреге при разъяснении отличия его исчисления понятий от логики Буля, – это различие между пониманием логики как calculus ratiotinator и как lingua characterica. Сам Фреге рассматривал свою логику как воплощение lingua characterica, т.е. универсального языка. Эта универсальность фрегевского lingua characterica выражается в той универсальности, которой обладает теория квантификации в отличие от пропозиционального исчисления. Фреге часто называл булеву алгебру «абстрактной логикой», имея в виду то, что в ней пропозиции не анализировались, а редуцировались к значению истинности. Предложенная Фреге система записи понятий, введение предикатных букв, переменных и кванторов создают настоящий язык, а не только систему исчисления, в то время как булева алгебра остается лишь изучением алгебраических отношений между пропозициями.

Универсальность логики выражает себя в том, что в системе Фреге кванторы пробегают по всем объектам. Согласно Фреге, онтология мира разделена на объекты и функции. Онтологические обязательства алгебры Буля или логики да Моргана могут быть изменены: универсум рассуждений охватывает только то, что мы согласны рассматривать в определенное время в определенном контексте, тогда как для Фреге универсум рассуждений не может быть вопросом произвольного выбора. Универсум Фреге всегда является *этим* универсумом (*the* universe), он фиксирован.

Ван Хейнурт указывает на важные следствия этой особенности исчисления понятий Г. Фреге: во-первых, функции должны быть определены для всех объектов (к примеру, функция «+» определена не только для натуральных чисел, но также скажем, для Луны и 1); во-вторых, ничто не может быть сказано за пределами данной системы. Именно это второе следствие крайне важно в свете нашей темы: Фреге фактически никогда не поднимает вопросов о непротиворечивости или полноте формальных систем.

Интересно отметить поразительное сходство между Фреге и Витгенштейном в том, как происходит усвоение языка. При этом у Фреге речь идет о его исчислении понятий: «Так как логика является языком, этот язык должен быть выучен. Подобно многим языкам, он должен быть выучен посредством внушения предложений. Представляя свою систему, Фреге неоднократно подчеркивает, что он дает “намек” читателю… Проблема состоит в том, чтобы привести читателя к “схватыванию”; он должен войти в язык» [2].

Ван Хейнурт подчеркивает, что фрегевский подход к логике оказал огромное влияние на ее развитие в XX в.: он может быть обнаружен, например, в работах Б. Рассела. В «Principia Mathematica» вопросы о самой системе и ее выразительных возможностях не ставятся так же, как и в работах Фреге. В своей работе 1930 года о полноте кванторной теории Гедель описывает аксиомы и правила вывода «Principia Mathematica» и добавляет: «Сразу возникает вопрос, действительно ли система аксиом и первоначально постулированные правила вывода полны, т.е. действительно ли они достаточны для получения каждой истинной логико-математической пропозиции, или постижимы ли истинные пропозиции (которые могут быть доказуемы на основе других принципов), которые не могут быть выведены в рассматриваемой системе» [3]. Вопрос о полноте теории квантификации не возникает сразу, – это так в силу универсальности логики Фреге и Рассела: универсальный формальный язык вытеснил естественный язык и сохраняет за пределами системы понятие валидности. Единственный вопрос о полноте, который может возникнуть в универсально понимаемой системе, является своего рода «экспериментальным» вопросом.

Универсалистский подход Фреге надолго становится парадигмой интерпретации формальных языков, а как следствие, тот круг вопросов, которые попросту «незаконны» при таком понимании системы, тоже не привлекают всеобщего внимания. Ситуация впервые меняется благодаря работе К. Левенгейма «Über Möglichkeiten im Relativkalkul» (1915 г.). И хотя в целом эта работа вполне укладывается в парадигму Фреге – Рассела, полученный результат наметил разрыв с универсалистской традицией. Вскоре, в течение 20-х годов XX в., благодаря работам Сколема, Эрбрана и Геделя происходит своеобразное слияние понимания логики как calculus ratiotinator и ее понимания как lingua characterica. С тех пор, согласно ван Хейнурту, математическая логика развивается в виде постоянного взаимодействия и переплетения двух интерпретаций формального языка логики.

У нас нет возможности вникать в технические детали развития и противостояния интерпретаций логики как calculus ratiotinator и как lingua characterica. Пока что мы установили только то, что универсалистский подход к логике не предусматривает возможности постановки вопросов, требующих выхода за пределы формальной системы, таких, например, как вопрос о полноте системы. Для того чтобы более четко охарактеризовать различия в указанных подходах, нам потребуется выйти за пределы только формальных языков и рассмотреть подобное различие интерпретаций применительно к языку в целом.

Язык как универсальный посредник и язык как исчисление

Различие между интерпретациями языка как универсального посредника и как исчисления касается различия в характеристике отношения языка к реальности, а также самой возможности существования реальности.

Относительно указанных вопросов мы можем различать две традиции, которые Я. Хинтикка назвал универсалистской и модельно-теоретической.

Принципы универсалистской традиции могут быть сформулированы следующим образом. Прежде всего, человек является узником языка: он не может выйти за пределы языка, не может переинтерпретировать его на более высоком уровне и, как следствие, не может выразить семантику языка в нем самом. Выше была продемонстрирована принадлежность Фреге к универсалистскому пониманию логики. Действительно, Фреге утверждал, что невозможно объяснить в языке его собственную семантику. Следовательно, единственно возможное в логической теории – это формулировка чисто формальных систем. Металогика или модельная теория были для Фреге попросту невозможны. Точнее, предметный язык и метаязык должны быть поняты «локально», как части данного (the) языка, единственного языка, которым мы располагаем. Наиболее важным следствием запрещения металогики является понятие истины: понятие истины характеризует отношение предложений языка к миру, и, следовательно, это отношение невыразимо в универсалистской интерпретации языка. Помимо этого невозможна и переинтерпретация языка, точнее, невозможно теоретизировать о подобного рода изменениях. Например, в универсалистской традиции на решение проблемы аналитических истин накладывается следующее ограничение: «Нет смысла говорить о других возможных мирах или даже о других интерпретациях нашего языка (или формального языка Фреге). Следовательно, логические истины не могут быть объяснены *a là* Лейбниц (или *a làКарнап) как истины в каждом возможном мире. Логические истины для Фреге являются истинами об этом* мире, хотя и о его наиболее абстрактных аспектах. Это объясняет, почему Фреге характеризует аналитические истины как основанные исключительно на общих законах и определениях, – позже эту характеристику повторил Куайн. Эти характеристики основаны на предположении, которое Рассел однажды выразил в своей неподражаемой манере, сказав, что “логика связана с действительным миром так же, как зоология, хотя и с его наиболее общими и абстрактными характеристиками”» [4]. Наиболее известными представителями универсалистского подхода к языку были Фреге, Рассел, Витгенштейн, Куайн.

Универсалистской традиции противостоит понимание языка как исчисления, представленное работами Буля, Шредера, Левенгейма, Геделя, позднего Карнапа, Тарского. Классическим примером реализации этого подхода является модельная теория. Модельная теория предполагает возможность переинтерпретации языка, будь он естественным или формальным, – она предполагает идею языка как исчисления. Принципиальными понятиями модельно-теоретической традиции являются понятие универсума рассуждения и понятие истины, выразимое в метаязыке. Несмотря на то что основания универсалистского подхода фактически заложили создатели современной математической логики, доминирующей оказалась интерпретация языка как исчисления. «По сути дела, несмотря на то что, как кажется, говорят многие философы, большая часть работ в абстрактной логике заключается не в дедукции теорем из аксиом таких теорий, как теория групп, теория полей и проч., а в выводе метатеоретических результатов, касающихся аксиоматических теорий и их моделей» [5].

Наиболее важным для модельно–теоретической традиции является допущение выразимости понятия истины в метаязыке, знаменитый результат А. Тарского в этом отношении является парадигмальным. Тарский признает справедливость универсалистской интерпретации объектного языка, но в то же время демонстрирует возможность определения понятия истины в метаязыке: «Характерной особенностью обыденного языка (в противоположность различным научным языкам) является его универсальность. … Именно этот универсализм обыденного языка в сфере семантики является предположительным существенным источником всех так называемых семантических антиномий, таких как антиномия лжеца или антиномия гетерологических выражений; эти антиномии, по-видимому, просто указывают, что на почве каждого языка, который был бы в вышеуказанном смысле универсальным и который бы при этом подчинялся обычным законам логики, должно возникнуть противоречие» [6]. Метаязык позволяет справиться с подобными трудностями, порожденными универсалистскими характеристиками языка. Знаменитая теория Тарского демонстрирует возможность определения истины для формальных систем. Модельно–теоретическая традиция развивалась применительно к эксплицитно сформулированным формальным языкам и только впоследствии была распространена на естественные языки.

В первые десятилетия прошлого века модельно-теоретическое мышление имело мощного союзника. Другой особенностью становления модельно-теоретической традиции является ее опора на аксиоматический метод, нашедший свое наиболее удачное воплощение в области математики. В «Основаниях геометрии» Д. Гильберта система аксиом элементарной геометрии осмысливается в чисто модельно-теоретических терминах. В этой работе не проясняется, чем являются точки, линии и плоскости; Гильберт ясно дает понять, что любая структура объектов, которая удовлетворяет представленным аксиомам, будет определена как геометрия. «Нет сомнения, – пишет Я. Хинтикка, – что “Основания геометрии” Гильберта были одними из центральных ворот, через которые модельно-теоретическое мышление вошло в логику и философию XX в.» [7]. Хинтикка указывает, что большая часть принципов формализма должна быть понята именно как следствие принятия Гильбертом модельно-теоретической традиции.

Различие между модельно-теоретическим и универсалистским подходами ярко иллюстрирует переписка Фреге и Гильберта. Фреге оспоривает справедливость положений «Оснований геометрии», демонстрирует фундаментальную несовместимость двух указанных традиций. Для Гильберта нет смысла задаваться вопросом об определении основных понятий геометрии в том смысле, в каком этого требовал Фреге: для Гильберта было «очевидным, что любая теория является только лесами, или схемой понятий вместе с их необходимыми связями друг с другом, и что основные элементы могут быть рассмотрены любым способом, который кому-то нравится. Другими словами, любая теория всегда может быть применена к бесконечно многим системам основных элементов» [8].

Не менее отчетливо противостояние двух традиций видно в понимании проблемы непротиворечивости. Для Фреге как последовательного универсалиста, доказательство непротиворечивости сводится к следующему: «Что мы должны иметь в виду под демонстрацией того, что определенные свойства, или требования (или кто-то еще как-то иначе хочет называть их) не противоречат друг другу? Единственный смысл, который я знаю, есть следующее: указать на объект, который имеет все эти свойства, предоставить случай, в котором все эти требования удовлетворены. Не кажется возможным доказать отсутствие противоречия каким-либо иным способом» [9]. Строго говоря, для Г. Фреге, не могло существовать проблемы согласованности, – значимой, на его взгляд, является проблема истины: из истинности аксиом следует, что они не противоречат друг другу, стало быть, нет необходимости в дальнейшем доказательстве. Согласно Гильберту, одним из источников ошибок является именно процедура выдвижения новых аксиом, принимаемых за истинные, из чего делается вывод о непротиворечивости системы. Различие между двумя подходами к языку в случае проблемы непротиворечивости иллюстрируется двумя лозунгами, представленными соответственно позициями Фреге и Гильберта: для универсалиста из истинности следует непротиворечивость, а для сторонника модельно-теоретической позиции, наоборот, из непротиворечивости следуют истинность и существование всех объектов, удовлетворяющих системе аксиом.

Из этой иллюстрации видно, что сторонники модельно-теоретической традиции и сторонники традиции интерпретации языка как универсального посредника будут по-разному оценивать значимость даже сугубо технических результатов философии математики. Если для представителя модельно-теоретического подхода такие характеристики формальных систем математики, как непротиворечивость и полнота, являются не просто важными, но исследование связанных с ними проблем имеет ключевое значение для понимания природы математического знания и решения таких классических вопросов, как природа математической истины, нормативность математических рассуждений, необходимость математической истины и проч., то пропонент универсалистского подхода будет относиться к исследованиям подобных формальных свойств системы в лучшем случае как к не относящимся к делу техническим изысканиям.

«Замечания по основаниям математики» Л. Витгенштейна содержат ряд высказываний, которые иллюстрируют именно такое отношение к роли формальных характеристик системы в прояснении проблем философии математики. На наш взгляд, анализ философии математики в перспективе противопоставления модельно-теоретической и универсалистской позиций позволит существенно продвинуться в объяснении оснований многих «скандальных» заявлений Витгенштейна относительно природы математики.

Универсалистски понятый язык и философия математики Л.Витгенштейна

Неоднократно подчеркивалось, например тем же С. Крипке, что для правильного понимания философии математики Витгенштейна ее следует рассматривать как составную часть того комплекса проблем, которым посвящены «Философские исследования». Мы не станем давать характеристику философии позднего Витгенштейна в целом или пытаться сколько-нибудь подробно разбирать его философию математики. В связи с тем, что нас интересует именно проявление универсалистской позиции у позднего Витгенштейна, сосредоточим внимание только на одной весьма важной для понимания его идей указанного периода проблеме – проблеме следования правилу. Тесно связанные между собой проблемы языковых игр и следования правилу являются сквозными и для «Философских исследований», и для «Замечаний по философии математики»На наш взгляд, сама формулировка проблемы следования правилу и та роль, которую она играет в позднем творчестве Витгенштейна, обусловлены его универсалистской позицией.

Согласно Витгенштейну, язык представляет собой исчисление: «Когда кто–то интерпретирует или понимает знак в том или ином смысле, то, что он делает, представляет собой шаг в исчислении» (Philosophical Grammar, I, sec.13). И далее в «Философских исследованиях»: «А что есть предложение, определяется, с *одной* стороны, правилами его построения … а с другой – употреблением знака в языковой игре» [10]. В «Philosophical Grammar» (II, sec.19, II, раздел 31) Витгенштейн впервые переходит от использования понятия исчисления к понятию языковой игры. Это изменение может быть отчасти обусловлено тем, что понятие исчисления предполагает существование эксплицитных правил, тогда как языковая игра характеризуется тем, что она концептуально предшествует правилам, неважно – строгим или нестрогим. Переход к понятию языковой игры в «Философских исследованиях» наглядно демонстрирует господство позиции универсализма в философии Витгенштейна.

Основным следствием универсалистской интерпретации языка является неприятие метаязыковых средств экспликации семантических понятий. Естественно, понятия истинности и значения языкового выражения в рамках этой традиции получат совершенно иную интерпретацию, чем в рамках модельно-теоретического подхода. Так, основным понятием при объяснении значения языкового выражения в философии позднего Витгенштейна является понятие правила: значение выражения представлено правилом его употребления в языковой игре. Сам язык при этом понимается как игра, которая состоит из правил употребления языковых выражений. Усвоить язык – значит усвоить правила употребления выражений. Одной из наиболее важных характеристик языковой игры и языка как такового является его публичность. Знаменитый тезис о невозможности индивидуального языка – это одна из наиболее известных попыток доказательства тезиса о публичной природе языка. В связи с этим становится понятно, что центральной проблемой семантического исследования для Витгенштейна выступает проблема объяснения природы и самой возможности языкового поведения как алгоритмической деятельности, полностью определенной правилами. В связи с публичной природой языковой игры эта проблема предстает как проблема объяснения возможности усвоения правил, определяющих алгоритм языкового поведения. Скептический парадокс Витгенштейна –

Крипке является демонстрацией того, что в принципе невозможно решать указанную проблему в универсалистской традиции.

Парадокс представляет собой абсолютизацию идеи, согласно которой, значение языкового выражения есть просто ход в языковой игре; следовательно, экспликация значения – это описание правила, определяющего употребление выражения. Крипке предлагает рассмотреть в высшей степени тривиальную ситуацию: я высказываю утверждение «68 + 57 = 125». «После проверки своего действия я, вероятно, уверен, что "125" – это правильный ответ, – рассуждает Крипке. – Он корректен как в математическом смысле, поскольку 125 есть сумма 68 и 57, так и в металингвистическом смысле, поскольку "плюс", как я намеренно употреблял это слово в прошлом, обозначал функцию, которая, будучи применена к числам, называемым мною "68" и "57", дает результат 125». [11]. Теперь говорящий подвергается допросу со стороны скептика о том, может ли он специфицировать то правило, которое предопределяет его высказывания, когда они содержат слово «плюс»: может ли носитель языка привести какие-либо факты, однозначно демонстрирующие, что употребляя, например, слово «плюс» сейчас, он употребляет его с точно тем же значением, что и в прежних случаях потребления этого слова. Скептик не требует ничего, что могло бы привести к сколько-нибудь серьезным трудностям. Ответом скептика могла бы служить дефиниция истинности для предложения рассматриваемого языка, в нашем случае – для предложения «68 + 57 = 125».

Основываясь на семантическом определении истины, возможно сформулировать описание правила, определяющего использование каждого предложения в языковой игре. Правило употребления выражения могло бы состоять в том, что говорящий обязан всегда употреблять предложения языка так, чтобы они удовлетворяли семантическому определению истинности высказывания для данного языка *L*. В этом случае говорящий успешно следует правилу употребления выражения тогда, когда может приписать ему значение истинности «истина», и нарушает правило в том случае, если его высказыванию приписывается значение «ложь».

Проблема возникает тогда, когда скептик настаивает на том, чтобы говорящий смог привести факт, гарантирующий, что референция термина сохраняется при каждом его употреблении. Семантическое определение истины в духе А. Тарского предполагает факт сохранения референции термина во всех случаях его употребления как необходимое условие для формулировки определения истины. В рамках семантики Тарского ответ на вопрос скептика мог быть сформулирован следующим образом: по определению. Парадокс Витгенштейна – Крипке обращается именно к той проблеме, которая не предполагается в теоретико-модельной семантике Тарского. Скептик просто требует различить значения, а значит, и правила, определяющие употребление выражений – двух терминов: «плюс» и «квус». При этом под квусом имеется в виду функция, которая определяется следующим образом*: $x \$ y = x + y$, если x и $y < 57$, и $x \$ y = 5$ во всех других случаях.

Если нет гарантии сохранения референции термина, то нет возможности специфицировать правило, обеспечивающее стабильность референции и нет возможности сформулировать семантическое определение истины для данного языка. В таком случае для говорящего не существует способа однозначно специфицировать правило, которому он следует, а значит, для него нет возможности утверждать, что он вообще следует какому-либо правилу. То есть не сохраняется ни одной возможности для семантики в духе Тарского. Фактически скептик демонстрирует, что семантика невозможна: «…Наше схватывание условий истинности утверждений сложения предполагало бы схватывание правила вычисления плюс-функции. … Как только мы схватываем правило вычисления плюс-функции, мы можем понять это утверждение и увидеть, что оно истинно. Различие между тем, что я имею в виду под “плюс” и “+”, в действительной и вымышленной ситуации отражает различие в условиях истинности моих утверждений сложения в этих двух ситуациях» [12].

Следствия принятия скептического парадокса Витгенштейна – Крипке очевидны. Прежде всего, мы должны отказаться от того, что наши термины сохраняют референцию во всех случаях их употребления. В связи с тем, что референция терминов определяет истинность предложений, мы не можем сформулировать определения истинности и, будучи неспособны определить истинность предложений, мы не можем утверждать, что вообще понимаем их. В связи с тем, что изначально в семантике позднего Витгенштейна значением предложения является правило его употребления, мы не можем специфицировать правила, определяющие употребление предложений. В результате принятия скептического решения парадокса Витгенштейна – Крипке мы вынуждены отрицать возможность семантики, в основании которой лежит понятие истинности или

---

* Символически квус–функцию обозначим как «$».

понятия, которые могут быть определены через него, т.е. модельно-теоретической семантики.

Важным следствием универсализма в философии математики Витгенштейна является то, что он не может использовать в математике собственно семантические понятия, отличные от понятия доказуемости в данной системе. Математика для него фактически сводится к определенному набору систем исчисления. Универсалистская интерпретация языка имеет чрезвычайно важные следствия для философии математики Витгенштейна. При этом отказ от металингвистических исследований приводит к тому, что основные свойства формальных систем остаются непроясненными, ведь Витгенштейн отказывается признавать традиционные модельно-теоретические способы характеристики формальных систем. Парадигмальным примером в этом отношении является вышеприведенный парадокс следования правилу.

Верный универсалистской догме, Витгенштейн вынужден отвергать все попытки доказательства непротиворечивости, точнее, он вынужден рассматривать такие доказательства как просто иное исчисление наравне с первоначальной математической системой. В случае с математикой мы сталкиваемся прежде всего с вопросом о непротиворечивости формальной системы. Хорошо известное Приложение I к «Замечаниям по основаниям математики» иллюстрирует отношение Витгенштейна к непротиворечивости как существенному свойству формальных систем: «Но ведь здесь же налицо противоречие! – Ну да, здесь противоречие. А чему оно здесь мешает? (Суеверный страх и почтительность математиков перед противоречием.)» [13]. Если Фреге отводит непротиворечивости второстепенное значение, то Витгенштейн фактически отрицает ее значимость.

Одним из различий между семантиками, основанными на универсалистском подходе к языку и на подходе к языку как исчислению, является отношение к парадоксам. Хорошо известно, какое внимание уделяется парадоксам в семантических исследованиях Тарского: роль парадоксов он уподобляет роли решающего эксперимента в эмпирической науке. «Всякий раз, когда это случается, – пишет Тарский, – мы должны подвергнуть наши способы мышления основательной ревизии, отвергнуть какие-то посылки, в которые верили, и усовершенствовать способы аргументации, которыми пользовались» [14]. В семантиках, основанных на представлениях о языке как универсальном посреднике, парадоксы приемлемы, – они являются вполне нормальной частью принятой языковой игры. Так, Витгенштейн, рассуждая о самореференции в Приложении I к «Заметкам по философии математики», трактует парадокс Эпименида как вполне заурядное явление: что нам мешает включить в языковую игру предложение, которое само себя описывает как ложное, – мы ведь постоянно пользуемся такими предложениями, например формулируя саму проблему самореференции?

Самым скандальным проявлением универсалистской позиции Витгенштейна в философии математики стала его интерпретация результата Геделя о неполноте формальных систем типа «Principia Matematica». Вопросы о полноте возникают совершенно естественно в ходе изучения формальных систем, такие вопросы фактически составляют сердцевину математической логики. Витгенштейн недвусмысленно отрицает значимость второй теоремы Геделя о неполноте: «Ты говоришь: “…следовательно *P* истинно и недоказуемо”. Это, вероятно, означает: “Итак, *P*”. Пожалуй, я не возражаю, но с какой целью ты записываешь данное “утверждение”? … И как бы ты смог объяснить мне истинность утверждения, если сам не можешь использовать его для чего-нибудь иного, кроме как для этих маленьких фокусов?».

Характеристика значимости непротиворечивости и полноты формальных систем является наиболее ярким примером влияния универсалистской позиции на философию математики Витгенштейна. Такое влияние без особого труда можно проследить в трактовке Витгенштейном соотношения математики и логики, в его отрицании сколько-нибудь значимой роли последней в прояснении природы математического знания, в его интерпретации природы математического доказательства и т.д. По сути дела, нам не требуется приумножать примеры универсалистских предпосылок рассматриваемых Витгенштейном проблем философии математики. Практически все они окажутся следствиями тех имплицитных предпосылок, которые Хинтикка назвал универсализмом. Все они в той или иной степени являются следствием отрицания значимости и даже самой возможности метаязыковых исследований. Скептический парадокс следования правилу – следствие этого запрета в области семантики. Оценка значимости непротиворечивости и полноты формальных систем представляет собой следствие универсалистской традиции для философии математики.

Мы не ставили своей целью продемонстрировать несостоятельность универсалистской или модельно-теоретической традиции. Нашей целью являлась демонстрация того, что математическое знание, которое извечно считалось образцом строгости и точности, воплощением абсолютного знания, оказывается несвободным от разного рода предпосылок, которые могут оказаться связанными с решаемыми, зачастую сугубо техническими, проблемами только косвенно. Более того, именно такие предпосылки обусловливают собою и восприятие значимости полученных в рамках математической логики или математики результатов, и их релевантность для решения сугубо философских проблем. На наш взгляд, философия математики Витгенштейна, который впервые заявил о необходимости релятивизации значимости незыблемых классических результатов оснований математики и математической логики, ярко демонстрирует этот вид обусловленности. При этом любопытно отметить тот факт, что одной из целей философии математики Витгенштейна являлась именно подобная демонстрация отсутствия четкой границы между философией, математикой и обыденным мышлением, по крайней мере в области языка.

Предложенное Я. Хинтиккой различие между интерпретациями языка как универсального посредника и как исчисления, безусловно, не является универсальным ключом к решению основных проблем философии математики, философской логики или философии языка. Тем не менее, на наш взгляд, предложенное им различие крайне плодотворно, в частности оно позволяет взглянуть по-новому на некоторые проблемы философии математики и философии языка, до сих пор вызывающие живой интерес у философской публики. Из упомянутых выше это проблема скептического парадокса Витгенштейна – Крипке, восхитительная полемика между Г. Фреге и Д. Гильбертом, а также недавние интерпретации оценки Витгенштейном результата К. Геделя о неполноте (имеется в виду вызвавшая живой интерес и жесточайшую критику попытка «оправдания» витгенштейновской интерпретации результата о неполноте, предпринятая Дж. Флойдом и Х. Патнэм). Ценность подходов, подобных дистинкции, использованной Хинтиккой, заключается в том, что они позволяют хотя бы отчасти развеять чары мифологии, которые однозначно расставляют акценты в философской проблематике и канонизируют определенные достижения в качестве абсолютных истин, обладающих иммунитетом против пересмотра и претендующих на то, чтобы задавать канон респектабельного философского исследования даже в столь абсолютно свободной от невыявленных предпосылок области философии, как философия математики.

Примечания

1. *Brouwer L.E.J.* Intuitionism and formalism // Philosophy of Mathematics: Selected Readings. – 2nd ed. / Ed. by P. Benacrraf and H.Putnam.– Cambridge Univ. Press, 2004. – P. 77–89.

2. *Heijenoort J., van.* Logic as calculus and logic as language // Hintikka J. Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy. – Kluwer Academic Publishers, 1997. – P. 235.

3. Цит. по: *Heijenoort J., van.* Logic as calculus and logic as language. – P. 236.

4. *Hintikka J.* On the development of the model–theoretic viewpoint in logical theory // Hintikka J. Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator… – P. 105.

5. Ibid. – P. 106-107.

6. *Тарский А.* Понятие истины в языках дедуктивных наук // Философия и логика Львовско–Варшавской школы. – М.: РОССПЭН, 1999. – С. 32–33.

7. *Hintikka J.* On the development of the model–theoretic viewpoint in logical theory. – P. 109.

8. Ibid. – P. 110–111.

9. *Frege G.* Philosophical and mathematical correspondence. – Oxford: Basil Blackwell, 1980. – P. 45.

10. *Витгенштейн Л.* Философские исследования // Языки как образ мира. – М.: Изд-во АСТ, 2003. – С. 295.

11. *Крипке С. А.* Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 2005. – С. 15.

12. *Ebbs G.* Rule–following and realism. – Harvard Univ. Press, 1997. – P. 14–15.

13. *Витгенштейн Л.* Заметки по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. – Ч. II. – М.: Гнозис, 1994. – С. 55.

14. *Тарский А.* Понятие истины в языках дедуктивных наук. – С. 138.

Институт философии и права СО РАН,
г. Новосибирск

Khlebalin, A.V. **Language premises in philosophy of mathematics**

The paper presents an attempt to reveal the role of premises concerning the nature of language and their influence on philosophy of mathematics. The analysis of L.Wittgenstein's philosophy made possible to show the influence of these premises on estimation of importance of mathematical results and definition of their relevance for philosophy of mathematics. Moreover, the paper shows that Wittgenstein's devotion to the universalist approach to language especially causes his interpretations and his estimation of importance of consistency and completeness of formal systems.