ОБЗОР АРГУМЕНТОВ ПРОТИВ ТЕЗИСА ЧЕРЧА*

К.Ф. Самохвалов

В современной литературе словосочетание «тезис Черча» истолковывается отнюдь не однозначно. Если учитывать все такие истолкования, то тема, сформулированная в названии статьи, автоматически становится труднообозримой в рамках одной журнальной публикации. Поэтому читатель должен иметь в виду, что из всех упомянутых истолкований ниже обсуждается только одно, зато, можно сказать, *стандартное* истолкование. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, вместо «тезис Черча» далее (вплоть до п. 3.5) всюду пишется «Тезис Черча».

Хотя Тезис Черча фигурирует на философско-математической сцене около семи десятилетий, все еще остается не вполне определенным его эпистемологический статус. Цель статьи – привнести некоторую дополнительную информацию в дебаты по этому вопросу. Для этого в разделе 2 излагаются всего три, но в сумме показательные для выбранного стандартного истолкования попытки аргументировать против Тезиса Черча. В разделе 3 осуществляется анализ каждой из этих попыток. Вводный материал приводится в разделе 1.

1. Тезис Черча

Цель настоящего раздела – сформулировать Тезис Черча в приемлемом для обсуждения виде.

1.1. Слова «алгоритм», «эффективный», «вычислимый», «эффективно вычислимый» и т.п. встречаются в современной литературе по

*Работа поддержана грантом НШ-4413 и Междисциплинарным интеграционным проектом Сибирского отделения РАН № 1 – «Вычислимость и рациональность: исследование сферы применимости тезиса Черча – Тьюринга и понятия эффективного вычисления к проблеме соотношения дедуктивного и эмпирического способов познания когнитивных и физических процессов».

математике и философии науки часто. Тем не менее они остаются скорее общекультурными, чем строго научными терминами. Правила их употребления жестко не фиксированы, из-за чего возникают недоразумения.

Для того чтобы резко снизить риск возникновения недоразумений, читателю с самого начала предлагается соотносить слово «вычислимый» только с *функциями*, *отношениями* и *множествами*, а слово «эффективный» – только с *представлениями* (*точными описаниями*) этих функций, отношений и множеств [1]. Что же касается слова «алгоритм», то предполагается, что читатель владеет понятием алгоритма в его обыденном неформальном значении. Однако тут нужно сказать следующее.

Главным в конкретном алгоритме обычно является то, что он решает некоторую задачу, которая нас интересует и которая нам понятна. Поэтому естественно считать, что спецификация конкретного алгоритма завершена *только* тогда, когда она включает в себя формулировку задачи, для решения которой он *предназначен*. Однако в предлагаемых в литературе пояснениях обыденного смысла слова «алгоритм» об этом обстоятельстве часто говорят как-то мимоходом, а то и просто умалчивают [2].

Такая политика приводит к тому, что в рассуждения проникают, затемняя их, не относящиеся к делу значения этого слова. Диапазон таких посторонних значений широк: от программы для воображаемого или реального компьютера до предписания регистрировать исходы последовательных бросаний монеты. С целью отсечь с самого начала эти посторонние смыслы читателю предлагается несколько скорректировать сложившееся у него интуитивное представление о содержании слова «алгоритм». Скорректировав это представление должным образом, под алгоритмом следует понимать предписание, *что нужно пошагово делать*, *чтобы по любой задаче* $\boldsymbol{x}$ *из заранее заданного (не более чем счетного) множества* $\boldsymbol{P}$ *математических задач, понятных пользователю алгоритма, получить результат* $s(\boldsymbol{x})$ *решения этой задачи*, *если она вообще имеет решение*. При этом должно подразумеваться, что выполнены следующие дополнительные условия:

1) каждая задача $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P}$ имеет один и только один результат своего решения (хотя самих решений может быть много) или вообще не имеет решения и, следовательно, не имеет результата;
2) с множеством $\boldsymbol{P}$ ассоциируется некоторый не более чем счетный алфавит, из символов которого составляется *индивидуальное имя* (*формулировка для*) каждой задачи $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P}$, причем каждое такое

имя (обозначим его через x) является конечным текстом в указанном алфавите (соответствующее множество имен обозначим через P);
3) рассматриваемое предписание (обозначим его через M_P) применимо к каждому имени x из P;
4) если без ошибок исполнять M_P применительно к произвольному имени x из P, то это исполнение (назовем его *x-исполнением* и обозначим $M_P(x)$) или завершается через конечное число шагов, или неограниченно продолжается, никогда не завершаясь;
5) для любого элемента x множества P, если соответствующая задача $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P}$ имеет решение, то *x-исполнение* $M_P(x)$ состоит из конечного числа шагов и указывает по своем завершении на результат $s(\boldsymbol{x})$ решения задачи $\boldsymbol{x}$, а если $\boldsymbol{x}$ не имеет решения, то $M_P(x)$ или никогда не завершается, или завершается безрезультатно;
6) M_P может исполняться (практически или в принципе) человеком, вооруженным *только лишь* неограниченным запасом бумаги и карандашей и ничем больше;
7) исполнение M_P не требует от исполняющего человека никаких способностей, превышающих способности аккуратного клерка.

О понимаемом таким образом предписании M_P мы говорим, что алгоритм M_P *реализует* множество $\boldsymbol{P}$ задач [3].

Следует заметить, что в литературе по философии математики иногда можно натолкнуться на более широкое понимание термина «алгоритм», соответствующее исключению из условий 1–7 пункта 7. Каждый такой случай употребления термина «алгоритм» в расширенном смысле желательно оговаривать особо.

1.2. Пусть f – частичная функция из D в R, где D и R не более чем счетные множества. С функцией f можно ассоциировать следующее множество P_f задач $\boldsymbol{f(d)}$:

$$P_f = \{\, \boldsymbol{f(d)} \mid \boldsymbol{f(d)} \text{ есть задача: по } d \in D \text{ указать } f(d)\}.$$

Ясно, что в рассматриваемом общем случае в множестве P_f может быть как задача $\boldsymbol{f(d)}$, имеющая решение (когда $d \in \delta_f$), так и задача $\boldsymbol{f(d)}$, не имеющая решения (когда $d \notin \delta_f$).

Говорят, что некий алгоритм M_D *реализует функцию* f, если и только если он реализует множество P_f задач.

Два алгоритма *функционально эквивалентны*, если они реализуют одну и ту же функцию.

Далее мы говорим: *функция f вычислима*, если имеется алгоритм, который реализует f.

Слово «имеется» в этом определении указывает только на существование алгоритма, а не на его знание. То есть это слово («имеется») означает здесь классическое, а не конструктивное, как предлагала считать Р. Петер [4], существование алгоритма.

Аналогичное определение мы принимаем для многоместных функций.

На будущее можно определить также, что *множество* (*многоместное отношение*) *вычислимо*, если вычислима его (его графика) частичная характеристическая функция.

1.3. Напомним, что *представление функции* (*функциональное представление*) – это синтаксические выражение, и существует интерпретация этого выражения как функции. Например,

$$\lambda x(x+1)^2,\ \lambda x \sum_{i=0}^{x}(2i+1)$$

суть два различных представления одной и той же числовой (арифметической) функции [5], или, что то же, два различных описания некоторого одного и того же множества пар натуральных чисел, где все пары различаются первыми элементами.

Условимся говорить, что представление φ *эффективно*, если φ определяет алгоритм, который реализует функцию, описываемую φ .

Другими словами, речь идет о том, что φ эффективно ровно тогда, когда, интерпретируя φ, мы будем знать алгоритм, который реализует функцию, обозначаемую посредством φ, причем мы приобретаем это знание без использования какой-либо информации, которая не являлась бы частью той, что необходима для понимания самого представления φ .

Условимся также говорить, что представление φ *квазиэффективно*, если имеется алгоритм M, такой что можно (в принципе) установить, что M реализует функцию, описываемую посредством φ.

Подобным образом можно говорить об эффективных и квазиэффективных представлениях множеств и отношений, апеллируя к их (их графиков) характеристическим функциям.

1.4. Пусть φ – представление одноместной *числовой* функции *f*. Если φ *эффективно*, то для каждой пары $(n, m) \in f$ мы можем обнаружить тот факт, что $(n, m) \in f$, некоторой процедурой $M_N(x)$, известной из представления φ. Если φ *квазиэффективно*, то имеется определенная процедура (не обязательно известная из φ), для которой мы можем в принципе установить, что каждый из вышеуказанных случаев обнаруживается этой процедурой.

Примем следующее соглашение: высказывание вида «мы знаем алгоритм *для* φ» (где φ – представление функции) означает, что мы знаем определенный алгоритм *M* и знаем, что *M* есть алгоритм для (реализации) функции, описываемой φ. Тогда наши определения можно суммировать так:

Представление φ

– *эффективно*, если понимания φ достаточно для нас, чтобы знать алгоритм для φ;

– *квазиэффективно*, если имеется алгоритм, который может (в принципе) быть узнан как алгоритм для φ.

1.5. Для того чтобы подчеркнуть разграничения между эффективностью, квазиэффективностью и вычислимостью, приведем примеры.

Пусть *r* – предложение и G_r – представление «$\lambda x \mu_z(z = 0 \Rightarrow r)$» (μ – оператор минимизации). Тогда если *r* истинно, то G_r описывает постоянную нулевую функцию, а если *r* ложно, то G_r описывает постоянную единичную функцию. Здесь в любом случае имеется алгоритм, который реализует функцию, описываемую посредством G_r. Примером подобного алгоритма является одно из следующих двух предписаний:

M_1. Стереть вход. Записать «0».
M_2. Стереть вход. Записать «1».

Следовательно, функция, описываемая представлением G_r, вычислима при любом *r*. Однако имеется много предложений *r*, для которых G_r неэффективно. Например, если *p* – предложение, выражающее гипотезу Гольдбаха, то представление G_p не подсказывает никакого алгоритма для описываемой таким образом функции. (Напомним **гипотезу Гольдбаха**: *каждое четное число есть сумма двух простых*.) В настоящее время неизвестен алгоритм, который реализовал бы функцию, описываемую G_p. Если бы G_p подсказывало такой алгоритм, то всякий из нас, кто понимает G_p, знал бы его (следовательно, знал бы и решение проблемы Гольдбаха). Предположим, что станет известно, верна ли гипотеза Гольдбаха или нет. Тогда, конечно, мы будем знать алгоритм для G_p. Но это все же будет случай, когда G_p неэффективно. Представление G_p все равно не подсказывает никакого алгоритма; просто мы смогли узнать алгоритм для G_p, *добавив* к пониманию G_p некоторые факты арифметики, которые нам посчастливилось дополнительно узнать.

Предположим, что r – предложение, о котором известно (или может быть известно), что оно ложно. Тогда можно установить, что функция, обозначаемая G_r, является постоянной единичной функцией. Следовательно, имеется алгоритм (как $P2$), относительно которого можно установить, что он реализует функцию, описываемую посредством G_r. Иначе говоря, если известно, что r ложно (или можно узнать, что оно ложно), то G_r квазиэффективно. Аналогично если известно, что r истинно (или можно узнать, что оно истинно), то G_r также квазиэффективно.

Допустим теперь, что существуют абсолютно неразрешимые (т.е. такие, истинностные значения которых в принципе невозможно узнать) предложения и s – одно из них. Если бы G_s было квазиэффективным, то имелся бы алгоритм P, такой что можно было бы установить, что P реализует функцию, описываемую посредством G_s. Пусть y – результат применения P к «0». Ясно, что или $y = 0$, или $y = 1$ (в зависимости от значения истинности s). Следовательно, «$G_s(0) = 0$» можно разрешить. Однако чтобы получить $G_s(0) = 0$, нужно установить истинность s, а чтобы получить $G_s(0) = 1$, нужно установить ложность s. Поскольку оба варианта предполагаются невозможными (абсолютная неразрешимость s), постольку представление G_s неквазиэффективно [6].

Представление G_s иллюстрирует различие между выражениями «φ квазиэффективно» и «можно установить, что функция, описываемая посредством φ, вычислима». Хотя G_s неквазиэффективно, мы установили, что рассматриваемая функция постоянна и, следовательно, вычислима. Отметим, что утверждения: «функция, описываемая посредством φ, вычислима» и «можно установить, что функция, описываемая посредством φ, вычислима» также неравносильны.

Таким образом, из введенных определений вытекают следующие импликации:

(i) φ эффективно $\Rightarrow$ φ квазиэффективно;

(ii) φ квазиэффективно $\Rightarrow$ функция, описываемая посредством φ, вычислима;
(iii) можно установить, что функция, описываемая посредством φ, вычислима $\Rightarrow$ функция, описываемая посредством φ, вычислима.

Ни одно из обращений этих импликаций не является верным. Из определений вытекает также эквиваленция:

(iv) функция f вычислима $\Leftrightarrow$ f имеет (по крайней мере одно) эффективное представление.

1.6. Пусть φ– представление функции f, и φ неэффективно. Если f вычислима, то можно надеяться установить этот факт, предъявив какое-то другое, но уже эффективное (квазиэффективное) представление φ' для нее же. Но как, например, быть, если функция f не является вычислимой? Как установить этот факт? Имеется только одна возможность – *доказать*, что f, описываемая посредством φ, невычислима. Но для этого интуитивное понятие «вычислимая функция» должно быть сопоставлено с подходящим математическим понятием. В настоящее время для таких случаев принято использовать **Тезис Черча**:

(v) числовая функция f вычислима $\Leftrightarrow$ функция f частично рекурсивна.

Тезис Черча – гипотеза в том смысле, что он допускает фальсификацию. А именно, если кто-либо предъявит *очевидный* пример ситуации, когда указанная эквиваленция нарушается, то Тезис Черча будет опровергнут. Здесь апелляция к очевидности (а очевидность постигается только на опыте) делает эту гипотезу принципиально *эмпирической* [7]. Для нее, как и для любой другой эмпирической гипотезы, характерно спорадически возникающее (в порядке эпистемологической бдительности) желание весомо напомнить, что она не догма. Собственно говоря, различные попытки реализовать это желание и называются *аргументами против* Тезиса Черча. Как объявлено в преамбуле, ниже излагаются три из них, показательные в том смысле, что их анализ ведет к лучшему пониманию и самого Тезиса, и его статуса в эпистемологии.

Прежде чем приступить к такому анализу, договоримся для удобства временно называть импликацию слева направо в (v) *прямым* Тезисом Черча, а импликацию справа налево – *обратным*.

Кроме того, заметим, что эквивалентным аналогом Тезиса Черча (v) для числовых множеств является формулировка

(v$^{\#}$) числовое множество E полуразрешимо $\Leftrightarrow$ множество E рекурсивно перечислимо.

Подчеркнем также, что стандартная формулировка (v) принадлежит С.К. Клини, и она является обобщением исходной классической формулировки Тьюринга – Черча:

(vi) всюду определенная числовая функция f вычислима $\Leftrightarrow$ функция f (обще)рекурсивна.

Эквивалентным аналогом формулировки (vi) для числовых множеств является формулировка

(vi$^{\#}$) числовое множество E разрешимо $\Leftrightarrow$ множество E и его дополнение E^{o} *оба ре*курсивно перечислимы.

2. Аргументы против Тезиса Черча

В этом разделе упомянутые аргументы излагаются в хронологическом порядке.

2.1. *Аргумент от Кальмара* Л. Кальмар (L. Kalmar) в [8] рассматривает клиниевский пример необщерекурсивной функции $g(x)$, определяемой условием

наименьшее y, такое что $f(x, y) = 0$, если такое y существует;
$g(x) = 0$, если такое y не существует,

где $f(x, y)$ – подходящая общерекурсивная функция, и заявляет: «…Я покажу, что предположение о том, что $g(x)$ неэффективно вычислима [9] (в сущности, это следствие Тезиса Черча), имеет странные последствия. В самом деле, с одной стороны, для любого натурального числа p, для которого существует такое натуральное y, что $f(p, y) = 0$, может быть дан очевидный метод вычисления такого наименьшего y, т.е. метод вычисления $g(p)$. Вычисляем последовательно значения $f(p, 0), f(p, 1), f(p, 2), \ldots$ (каждое их этих значений может быть вычислено, если учитывать общерекурсивность f, за конечное число шагов) до тех пор, пока не получим натуральное число q, такое что $f(p, q) = 0$. Берем это q в качестве значения $g(p)$, т.е. полагаем $g(p) = q$. С другой стороны, для любого натурального числа p, для которого мы можем доказать, (не в рамках некоторой фиксированной системы постулатов, а произвольными средствами и, конечно, правильно), что не существует натурального y с $f(p, y) = 0$, мы также имеем метод вычисления значения $g(p)$ за конечное число шагов. А именно, доказываем, что не существует натурального y с $f(p, y) = 0$ (это требует в любом случае конечного числа шагов) и немедленно принимаем, что $g(p) = 0$. Следовательно, предполагая, что g не является вычислимой функцией и предполагая принцип *tertium non datur* (а он все равно уже был использован в определении функции g), мы делаем заключение о существовании натурального числа p, для которого, с одной стороны, *не существует натурального числа y* с $f(p, y) = 0$, и, с другой стороны, *этот факт не может быть доказан любыми корректными средствами.* Это следствие выглядит очень неправдоподобным»**.**

Далее Кальмар говорит, что предложение $\exists y\, f(p, y) = 0$ с таким p «*не может быть ни доказано, ни опровергнуто* не только в рамках фиксированной системы постулатов, но *даже при допущении любых корректных средств*. Оно не может быть доказано, ибо оно ложно, и оно не может быть опровергнуто, ибо его отрицание не может быть доказано. Насколько я знаю, это следствие Тезиса Черча, *viz.* существование предложения (без параметра), которое является неразрешимым в этом *действительно абсолютном* смысле, до сих пор не было отмечено. Однако это “абсолютно неразрешимое предложение” имеет дефект красоты: мы можем разрешить его, ибо мы знаем, что оно ложно. Следовательно, *Тезис Черча влечет существование абсолютно неразрешимого предложения, которое может быть разрешено*, *viz. оно ложно*, *или*, в другой формулировке, *существование абсолютно неразрешимой проблемы с известным определенным решением.* Действительно, очень странное следствие. Конечно, это следствие Тезиса Черча не может быть доказано какими-либо корректными средствами, ибо такое доказательство должно содержать, с одной стороны, опровержение рассматриваемого предложения, а с другой стороны, должно содержать доказательство того, что рассматриваемое предложение не может быть опровергнуто (как и доказано), что невозможно».

Касаясь взглядов Черча, Кальмар замечает, что Черч [10], приведя определение понятию конструктивности ординалов, принадлежащих ко второму числовому классу, комментирует это определение следующим образом: «Мое настоящее убеждение состоит в том, что это определение является абсолютным… Те же, кто не находят это определение убедительным, могут, вероятно, принять вызов: либо найти менее широкое определение, для которого нельзя показать, что исключается некоторый ординал, разумно допускаемый в качестве конструктивного; либо найти более широкое определение, для которого нельзя показать, что оно включает в себя некоторый ординал второго числового класса, невозможный в качестве конструктивного».

После этой цитаты Кальмар предлагает добавить к классу общерекурсивных функций все арифметические функции f, определяемые равенством вида $g(x) = \mu_y (f(x, y) = 0)$ с общерекурсивной функцией f двух переменных. И кроме того, он предлагает для всякой такой функции g и всякого данного натурального p следующий метод вычисления значения $g(p)$ за конечное число шагов. Вычисляем последовательно значения $f(p, 0), f(p, 1), f(p, 2), \ldots$, одновременно пытаясь доказать любым корректным способом, что ни одно из них не равно 0, до тех пор пока мы не обнаружим либо некоторое (наименьшее) натуральное число q, для которого $f(p, q) = 0$, либо доказательство предложения, утверждающего, что не существует никакого натурального y с $f(p, y) = 0$. Рассматриваем в первом случае это q, а во втором случае – 0 как результат вычисления.

Кальмар, таким образом, предлагает на роль вычислимых всюду определенных функций класс более широкий, чем класс общерекурсивных функций. Он замечает, что если вызов может рассматриваться как некий аргумент, то его предложение может рассматриваться как вызов найти общерекурсивную функцию f и натуральное число p и доказать, что для этих f и p предложенный им метод вычисления терпит неудачу. Далее он пишет:

«Я нахожусь в приятной позиции, позволяющей не опасаться, что кто-либо сделает это. Ибо среди прочего он должен будет доказать для своих f и p, что последовательно вычисляя значения $f(p, 0), f(p, 1), f(p, 2), \ldots$, мы никогда не получим 0, т.е. что нет y с $f(p, y) = 0$; если он сможет сделать это, то он не сможет доказать (корректным способом), что это предложение должно быть недоказуемым. …Я использовал несколько расплывчатое понятие доказательства произвольными корректными средствами.

Вероятно, это допустимо в предматематических рассуждениях. Однако… я могу заменить это понятие более определенным. Действительно, пусть S есть система равенств, служащая общерекурсивным определением функции f; пусть $f_1, f_2, \ldots, f_r (= f)$ – *функциональные символы, входящие в* S. Рассмотрим систему постулатов P, определяемую следующим образом. Формулы из P образуются из константного символа 0 и числовых переменных посредством функциональных символов $f_1, f_2, \ldots, f_r$ (с приписанными числами аргументов), символа равенства, предикатных переменных, функций истинности и кванторов. Постулаты P суть равенства, принадлежащие S, и равенства исчисления предикатов первой ступени с равенством. Далее, правила вывода P суть правила вывода исчисления предикатов первой ступени. Кроме того, рассмотрим непротиворечивые расширения P некоторыми формулами P в качестве новых постулатов. Теперь рассуждение … может быть повторено с понятием доказательства внутри такого непротиворечивого расширения P вместо понятия доказательства произвольными корректными средствами. В самом деле, если в таком расширении P мы можем доказать для некоторого натурального p формулу, которая формализует предложение, утверждающее несуществование натурального y с $f(p, y) = 0$, то тогда это предложение в действительности является истинным, и, следовательно, мы имеем $g(p) = 0$. Ибо в противном случае мы должны иметь $f(p, q) = 0$ для некоторого натурального q и, следовательно, по определению общерекурсивных функций, формулу из P, формализующую этот факт; и поэтому формула из P, которая формализует предложение, утверждающее существование натурального числа y с $f(p, y) = 0$, могла бы быть доказана в том же самом расширении P в противоречие с непротиворечивостью этого расширения. Следовательно, то же самое рассуждение, что и раньше, показывает, что Тезис Черча влечет существование натурального числа p, для которого, с одной стороны, не существует натурального y с $f(p, y) = 0$, а с другой стороны, формула из P, формализующая этот факт, не может быть доказана ни в каком непротиворечивом расширении P. Однако это следствие Тезиса Черча легко может быть опровергнуто. В самом деле, присоединяя формулу из P, которая формализует предложение, утверждающее, что $f(p, a) \neq 0$ (со свободной переменной a), мы должны получить противоречивое расширение P. Это следует, например, из генценовского доказательства непротиворечивости системы постулатов для арифметики. Действительно, мы будем иметь $f(p, q) \neq 0$ для любого натурального q, т.е. новый постулат есть верифицируемая формула из P. С другой стороны, в этом расширении P посредством правил исчисления предикатов первой ступени мы можем доказать формулу из P, которая формализует предложение, утверждающее, что не существует натурального y с $f(p, y) = 0$, в противоречие с вышеуказанным следствием из Тезиса Черча. Формально это рассуждение выглядит похожим на косвенное опровержение Тезиса Черча. Однако для того чтобы вычислить значение $g(p)$ для натурального p, для которого не существует натурального y с $f(p, y) = 0$, мы должны дать непротиворечивое расширение P, в рамках которого формула из P, формализующая этот факт, может быть доказана. Далее, легко определить такое расширение посредством отмеченного выше присоединения, однако для того чтобы доказать его непротиворечивость, мы должны доказать (некоторым корректным образом) верифицируемость нового постулата, т.е. что не существует никакого натурального y с $f(p, y) = 0$. Следовательно, наш вычислительный метод для значения $g(p)$ для любого данного p все же предполагает понятие произвольного корректного доказательства. Поэтому новая форма моих рассуждений так же эвристична, как и более ранняя. Вышеприведенными рассуждениями я пытался показать некоторые мотивы для моего убеждения, которое может быть суммировано следующим образом. Имеются пред-математические понятия, которые должны оставаться пред- математическими, ибо они не допускают какого-либо ограничения, навязываемого точным математическим определением. К ним принадлежат, как я убежден, такие понятия, как эффективная вычислимость, разрешимость или доказуемость произвольными корректными способами, объем которых не может прекратить изменяться в течение развития математики. Конечно, из моих рассуждений могут быть извлечены и другие следствия, если кто-либо захочет это сделать. Например, можно настаивать на Тезисе Черча и считать эти рассуждения как квазиопровержение принципа *tertium non datur*, как это сделал Марков на Третьем Всесоюзном математическом конгрессе в Москве в 1956 году» [11].

2..2. ***Аргумент от Боуи.*** Боуи (G.L. Bowie) [12] утверждает, что обратный Тезис Черча просто ложен, а прямой – ложен весьма вероятно.

Аргументируя первое свое утверждение, Боуи заявляет, что примером невычислимой рекурсивной функции является числовая функция $b(x)$, определяемая условием

$b(x) = 1$, если R истинно;
$b(x) = 0$, если R ложно,

где R должно быть высказыванием, таким, как «Цезарь думал о луне в момент своей смерти», истинностное значение которого мы не можем установить в принципе. Поскольку функция $b(x)$ заведомо постоянная, то, как правильно заключает Боуи, она является рекурсивной. Но поскольку мы в принципе не можем указать алгоритм, который ее реализует, постольку, по мнению Боуи, она невычислима, и, стало быть, $b(x)$ – контрпример для обратного Тезиса Черча.

В качестве контрпримера для прямого Тезиса Черча Боуи предлагает функцию $cf(x)$, определяемую следующим образом:

$cf(x) = 1$, если x-е подбрасывание монеты c завершается выпадением орла;
$cf(x) = 0$, если x-е подбрасывание монеты c завершается выпадением решки.

Боуи напоминает, что имеется континуум соответствий натуральных чисел в $\{0, 1\}$, т.е. 0, 1-последовательностей. Он добавляет также, что имеется только счетное число рекурсивных выражений. Так что, самое большее, только счетное число из этих 0, 1-последовательностей обозначается термами вида $\lambda x(g(x))$, где $g(x)$ – рекурсивное выражение. Тогда в высшей степени невероятно, что имеется некоторое выражение $g(x)$, такое что $\lambda x(g(x)) = \lambda x(cf(x))$. При этом Боуи считает, что $cf(x)$ – вычислимая функция.

2.3. ***Аргумент от «двуцветной арифметики».*** Предыдущие два аргумента эксплуатировали, если можно так выразиться, «проблемность» неформального и нестрогого понятия вычислимости; аргумент, рассматриваемый в данном пункте, отличается от них тем, что он, напротив, эксплуатирует «проблемность» точного математического понятия рекурсивности. Базируется он на простой теореме, формулировка которой следует ниже.

Пусть PA – первопорядковая арифметика Пеано в обычной сигнатуре $\Omega_0 = (+, \times, s, 0)$ с обычными аксиомами. Пусть $A(x)$ – какая-то формула арифметики, слабо определяющая рекурсивно перечислимое с нерекурсивно перечислимым дополнением множество R в PA. Расширим арифметику PA, добавляя к ее аксиомам еще две:

(i) $\forall x\, (R(x) \leftrightarrow A(x))$;
(ii) $\forall x\, (R(x) \leftrightarrow \neg P^{o}(x)$,

где R и R^{o}– новые одноместные предикатные символы. Полученную таким образом аксиоматическую систему в сигнатуре

$$\Omega = (+, \times, \mathbf{s}, \mathbf{0}; R, R^{o})$$

обозначим через V. Отправляясь от V, образуем аксиоматическую систему V^{o} в сигнатуре

$$\Omega^{o} = (+^{o}, \times^{o}\ \mathbf{s}^{o}, \mathbf{0}^{o}; R^{o}, R)$$

путем замены в V (в каждом выражении V) символа + на символ $+^{o}$, символа $\times$ на символ $\times^{o}$, символа **s** на символ $\mathbf{s}^{o}$, символа **0** на символ $\mathbf{0}^{o}$, символа R на символ R^{o}, символа R^{o} на символ R. Объединим эти две аксиоматические системы в одну, которую обозначим через W:

$$W = Th\ (V \cup V^{o}).$$

Очевидно, сигнатура Σ системы W имеет вид

$$\Sigma = (+, +^{o,} \times, \times^{o}, \mathbf{s}, \mathbf{s}^{o}, \mathbf{0}, \mathbf{0}^{o}; R, R^{o}),$$

а системы V и V^{o} входят в W симметричным образом. Систему W назовем (V, V^{o})-*симметричной над* PA. Заметим, что при указанном выше образовании V^{o} из V система PA образует систему PA^{o}, которая также является первопорядковой арифметикой Пеано, но только уже в сигнатуре ($+^{o}$, $\times^{o}$ $\mathbf{s}^{o}$, $\mathbf{0}^{o}$). Очевидно, что PA и PA^{o} входят в W также симметрично, благодаря чему система W имеет второе название: «*двуцветная арифметика*» [13]. Имеет место следующая теорема [14].

Теорема. Двуцветная арифметика W – консервативное расширение PA (и PA^{o}).

Вспомним, что формула A(x) выбрана так, чтобы она слабо определяла в PA некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество R. Точно так же можно утверждать, что формула $A^{o}(x)$, получаемая из A(x) при указанном выше переходе от V к V^{o}, слабо определяет в PA^{o} некоторое рекурсивно перечислимое с нерекурсивно перечислимым дополнением множество, скажем R^{o}.

Какие – рекурсивно перечислимые или нет – множества слабо определяют формулы $A(x)$ и $A^{o}(x)$ в системе W?

Однозначного ответа на этот вопрос не существует. Ибо, с одной стороны, формулы $A(x)$ и $A^{o}(x)$ играют совершенно симметричные роли в системе W, а с другой стороны, в W выводимо предложение $\forall x\,(A(x) \leftrightarrow \neg A^{o}(x)$. При этом сама система W является консервативным расширением как PA, так и PA^{o}. Иными словами, речь идет о том, что, например, множество R, соответствующее предикатному символу R, имеет два определения: одно – $\forall x\,(R(x) \leftrightarrow A(x))$; второе – $\forall x\,(R(x) \leftrightarrow \neg A^{o}(x)$. Согласно первому определению множество R рекурсивно перечислимо (с не рекурсивно перечислимым дополнением R^{o}). Согласно второму определению множество R нерекурсивно перечислимо (с рекурсивно перечислимым дополнением R^{o}). Совершенно аналогично обстоит дело и с множеством R^{o}.

Мы видим, таким образом, что свойство множеств натуральных чисел «быть рекурсивно перечислимым» является *частичным*: оно *не определено*, например, для R и для R^{o}.

В самом по себе этом обстоятельстве не кроется никакого абсурда. Однако если спросить, полуразрешимо ли или нет множество R (или множество R^{o}), и попытаться применить к R (или к R^{o}) Тезис Черча, то легко обнаруживается, что это применение абсурдно. Ибо Тезис Черча ($v^{\#}$) – как он сформулирован – предполагает, что свойство множеств «быть полуразрешимым» и свойство множеств «быть рекурсивно перечислимым» оба являются всюду определенными на классе всех числовых множеств. Следовательно, по указанной теореме, рассматриваемая формулировка некорректна (не «истинна» и не «ложна»).

3. Обсуждение аргументов против Тезиса Черча

3.1. Легко видеть, что из трех приведенных выше аргументов последний из них не требует сколько-нибудь глубокого анализа понятия вычислимости. В этом аргументе от вычислимости требуется только одно: свойство «быть вычислимым» должно быть всюду определено на классе всех числовых множеств. Поэтому рассматриваемый аргумент претендует на то, чтобы быть аргументом *против* Тезиса Черча ($v^{\#}$), самым поверхностным (малосодержательным) образом. Эта поверхностность проявляется в том, что если вместо формулировки ($v^{\#}$) взять ее естественное ограничение ($vi^{\#}$), то против Тезиса Черча в формулировке ($vi^{\#}$) аргумент от «двуцветной арифметики» бессилен.

Подчеркнем также, что рассуждения Боуи и Кальмара направлены против Тезиса Черча в формулировке (vi) (следовательно, и в формулировке (v)).

3.2. Вернемся к пункту 2.2. Если читатель сравнит его с пунктом 1.5, то он легко обнаружит, что функция $b(x)$, которую Боуи считает контрпримером для обратного Тезиса Черча, является на самом деле всего лишь примером вычислимой функции с неквазиэффективным представлением.

А чтобы понять, что функция $cf(x)$, которую Боуи предлагает в качестве «весьма вероятного» контрпримера для прямого Тезиса Черча, также не является таковым контрпримером, нет необходимости вдаваться в его, Боуи, вероятностные (точнее, квазивероятностные) рассуждения. Достаточно заметить, что процедура, которая, по мнению Боуи, обеспечивает вычислимость функции $cf(x)$, не реализует эту функцию в оговоренном ранее (в пункте 1.1) смысле. В самом деле, множество $\boldsymbol{P}cf$ задач для функции $cf(x)$ состоит из задач типа «для данного натурального числа n найти значение функции $cf(n)$». Процедура, предлагаемая Боуи для решения каждой такой задачи $cf(n)$, заключается в том, чтобы:

(1_n) считая осуществленными первые n–1 бросков монеты $\boldsymbol{c}$ и, следовательно, решенными задачи $cf(1)$, …, $cf(n–1)$, осуществить очередной n-тый бросок;
(2_n) посмотреть, каков исход этого броска;
(3_n) записать $cf(n) = 1$, если исход – «орел», и записать $cf(n) = 0$, если исход – «решка»;
(4_n) перейти к решению задачи, соответствующей аргументу $n + 1$ функции $cf(x)$.

Очевидно, первые два шага – (1_n) и (2_n) – на любом n-м этапе этой процедуры не могут быть осуществлены человеком, вооруженным *только* бумагой и карандашом, – он должен быть вооружен еще монетой $\boldsymbol{c}$. Следовательно, рассматриваемая процедура не является алгоритмом, так как она не удовлетворяет условию 6 из пункта 1.1. Следовательно, процесс регистрации исходов бросания монеты не может рассматриваться, как вычисление.

3.3. Обратимся, наконец, к аргументу от Кальмара. Пространные рассуждения Кальмара можно было бы без существенных потерь передать достаточно коротким набором суждений [15]). Однако мы привели их (см. пункт 2.1.) почти без изъятий, чтобы читатель сам мог проверить предлагаемую ниже версию того, как выглядит аргумент Кальмара в переложении его на язык задач, и в результате такой проверки понять, в чем именно Кальмар ошибается, если ошибается вообще.

Итак, рассмотрим для произвольного натурального числа x задачу $\boldsymbol{x}$: найти значение $g(x)$ функции g для этого x.

Если употреблять слова «убедиться», «можно», «нельзя» в максимально широком, непосредственно усматриваемом интуитивном значении, то, очевидно, приемлемо следующее определение: задача $\boldsymbol{x}$ называется *абсолютно неразрешимой*, если и только если нельзя убедиться в том, что $g(x) = 0$, и нельзя убедиться в том, что $g(x) \neq 0$.

Но тогда, независимо от того, является ли или нет произвольная задача $\boldsymbol{x}$ абсолютно неразрешимой, нельзя убедиться в том, что она является абсолютно неразрешимой. Ибо убедиться в этом – значит, во-первых, *убедиться, что нельзя убедиться*, что $g(x) = 0$, и, во вторых, *убедиться, что нельзя убедиться*, что $g(x) \neq 0$, а совместить эти «во-первых» и «во-вторых» невозможно. Действительно, допустим, мы *убедились*, что *нельзя убедиться*, что $g(x) \neq 0$. Но тогда мы или *убедились*, что $f(x, 0) = 0$, и, следовательно, *убедились*, что $g(x) = 0$, или *убедились*, что последовательный процесс вычисления значений $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2), \ldots$ никогда не обрывается получением нуля (ибо иначе мы *можем убедиться*, что $g(x) \neq 0$, последовательно вычисляя $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2), \ldots$, пока не дойдем до первого числа q, такого что $f(x, q) = 0$). А это, в свою очередь, значит, что мы опять убедились в том, что $g(x) = 0$. Следовательно, в любом случае мы убедились в том, в чем нельзя убедиться, если мы хотим убедиться, что задача является абсолютно неразрешимой.

Читатель, таким образом, видит, что высказывание

$$\forall x \neg\, Pu(x) \qquad (1)$$

выражает аналитически истинное суждение при истолковании, в котором предполагается, что: 1) переменная x изменяется над множеством натуральных чисел; 2) $Pu\,(x)$ – сокращение для фразы «можно убедиться, что задача $\boldsymbol{x}$ является абсолютно неразрешимой».

Пусть теперь предикат $Ps(x)$ – сокращение для фразы «можно убедиться, что задача ***x*** является разрешимой, т.е. можно убедиться в том, что $g(x) = 0$, или можно убедиться, что $g(x) \neq 0$», а предикат $Un(x)$ – сокращение для фразы «задача ***x*** является абсолютно неразрешимой». Если мы вспомним вышеприведенное определение абсолютно неразрешимой задачи, то станет очевидным, что высказывание

$$\forall x\, (\neg Ps(x) \to Un(x)) \qquad (2)$$

выражает еще одно аналитически истинное суждение.

Кальмар хочет понимать слово «вычислимость» так, чтобы при этом понимании заведомо выполнялась импликация

$$\forall x Ps(x) \to C(g), \qquad (3)$$

где $C(g)$ – сокращение для высказывания «g является вычислимой функцией». Иными словами, для Кальмара является аналитически истинным (именно постулатом значения) суждение «*если для любой задачи* ***x*** *из множества* $\boldsymbol{P_g}$ *можно убедиться, что она разрешима, то функция g является вычислимой*».

Пусть $GR(g)$ – сокращение для высказывания «g является общерекурсивной функцией». Тогда Тезис Черча применительно к g имеет вид эквиваленции

$$\neg GR(g) \leftrightarrow \neg C(g). \qquad (4)$$

Кроме того, мы имеем

$$\neg\, GR(g). \qquad (5)$$

Из (5) и (4) следует

$$\neg C(g). \qquad (6)$$

Из (6) и (3) следует

$$\exists x\, \neg Ps(x). \qquad (7)$$

Из (7) и (2) следует

$$\exists x\ Un(x). \tag{8}$$

Из (8) и (1) следует

$$\exists x\ (Un(x)\ \&\ \neg\ Pu(x)). \tag{9}$$

Кальмар находит суждение, выражаемое формулой (9) *неправдоподобным* и *странным*. Почему «неправдоподобным» – это совершенно ясно. Ведь при указанных истолкованиях оно означает, что *среди задач из множества $\boldsymbol{P_g}$ имеется хотя бы одна такая, которая является абсолютно неразрешимой, но убедиться в этом нельзя в принципе*, и, следовательно, навсегда остается сомнение, что она такова. Это нечто вроде утверждения, что в тексте статьи, которую вы сейчас просматриваете, существует страница, такая, что она окрашена в ярко-красный цвет, но принципиально невидимым для вас образом. Вы вправе, конечно, заявить, что толку от такого утверждения нет никакого, а потому это утверждение бессмысленно. Но Кальмар из вежливости скажет, наверное, что оно неправдоподобно.

Что же касается «странности», то тут следует сделать одну оговорку. При всей своей неправдоподобности или бессмысленности суждения, выражаемые по типу (9), весьма обыденны. Всякий раз, когда какой-либо человек задумывается о возможности *своей личной* (не чужой) смерти, он имеет в виду суждение «существует такой момент времени, когда Я не осознаю себя, но в принципе не в состоянии в этом убедиться». Кальмар должен был бы квалифицировать такое суждение как неправдоподобное, но квалифицировал бы он его как странное?!

Так ошибся ли в чем-либо Кальмар или нет? Ответ: ошибся, и вот в чем.

Смысл Тезиса Черча зависит, в частности, от смысла вычислимости, который, в свою очередь, зависит от того, как понимается алгоритм. Как уже отмечено, Кальмар вычислимость понимает таким образом, что при этом понимании выполняется импликация (3). Антецедент этой импликации выражает суждение «для всякого натурального числа x можно убедиться, что задача $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P_g}$ разрешима». При этом подразумевается, как тоже отмечено выше, что слово «убедиться» берется здесь в максимально широком значении. Однако *стандартный* Тезис Черча подразумевает, что вычислимость понимается таким образом, что при этом понимании выполняется не импликация (3), а импликация

$$\forall x Psc(x) \to C(g), \qquad (3a)$$

где в антецеденте $\forall$x $Psc(x)$ предикат $Psc(x)$ истолковывается как сокращение не для фразы «можно убедиться, что задача $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P_g}$ разрешима», а для фразы «можно убедиться *клерку*, что задача $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{P_g}$ разрешима». Это связано с тем, что вычислимость, понимаемая стандартным образом, подразумевает понимание алгоритма, ограниченное, в частности, условием 7 (см. пункт 1.1). Но при таком истолковании вычислимости из (6) и (3a) не следует (7), и рассуждения Кальмара проваливаются.

Таким образом, Кальмар не показал, что *стандартный* Тезис Черча неправдоподобен.

С другой стороны, если *дополнительно предположить*, что нет математического интеллекта, превосходящего интеллект клерка, иными словами, предположить, что

$$\forall x\, (Ps(x) \to Psc(x)), \qquad (3b)$$

то (6), (3a) и (3b) влекут (7) и, следовательно, аргументация Кальмара восстанавливается.

Однако нужно заметить, что предположение (3b) само выглядит сомнительным (по крайней мере для тех, кто не чрезмерно увлечен идеей построить искусственный интеллект). Ввиду этого ошибка Кальмара оборачивается достоинством его рассуждений.

Во-первых, в этих рассуждениях эпистемологически *обоснованно* предполагается более широкое (без условия 7) понятие алгоритма и соответственно более естественное понятие вычислимости, чем это предполагается в стандартном Тезисе Черча. Тем самым Кальмар *совершенствует* сам Тезис Черча, прежде чем его критиковать.

Во-вторых, критика Кальмаром правдоподобности усовершенствованного Тезиса Черча дает надежду *доказать* суждение, выражаемое посредством $\forall x\, Ps(x)$, и тем самым прямым образом *опровергнуть* усовершенствованный Тезис Черча.

3.4. Подведем итоги. Условимся временно обозначать стандартный Тезис Черча в формулировке (v) **(**или (v$^{\#}$)) через ТЧ, а в более частной формулировке (vi) **(**или (vi$^{\#}$)) – через ЧТЧ. Условимся также усовершенствованные по Кальмару версии ТЧ и ЧТЧ обозначать соответственно через УТЧ и УЧТЧ. Тогда

– аргумент от двуцветной арифметики говорит о том, что ТЧ и УТЧ – некорректные формулировки;

– аргумент от Кальмара вежливо говорит о том, что УЧТЧ неправдоподобен (хотя можно было бы прямо сказать, что УЧТЧ имеет бессмысленное следствие);

– незатронутой критикой осталась только формулировка ЧТЧ.

3.5. Как сказано в преамбуле, имеются и другие истолкования тезиса Черча помимо стандартного истолкования и его версий. К этим другим истолкованиям, в частности, относятся интуиционистское (так называемый *формальный тезис Черча*) и физико-математическое (так называемый *физический тезис Черча*, или *Р-тезис*) истолкования. Первое из них обсуждается в литературе в философско-математическом плане (подобно стандартному истолкованию), второе – в плане, если так можно выразиться, философско-физико-математическом.

Р-тезис – это гипотеза о том, что с помощью всякой *физической* системы можно вычислять только рекурсивные функции. Попытки опровергнуть Р-тезис относятся к темам о *гипервычислениях* [16]1. В настоящее время это такие темы, как

– *суперзадачи и бесконечные вычисления*;

– *вычисления на не-вполне-фундированных областях*;

– *аналоговые вычисления*;

– *квантовые вычисления*;

– *ретрокаузальные (обратно причинные) вычисления*.

Обзор сразу всех этих тем (и поэтому недостаточно детальный) содержится в статье П. Котоно [17]. Вывод, который он делает из своего обзора, состоит в следующем. Ситуация с Р-тезисом вполне аналогична ситуации с Тезисом Черча, а именно: даже если все перечисленные гипервычисления признать осмысленными и осуществимыми, что совсем не очевидно, то все равно это не приведет к какой-либо дополнительной эпистемологичской прибыли.

Существует ли гипервычисление, дающее такую прибыль, – вопрос, который пока остается открытым. У автора настоящей статьи имеются некоторые свои соображения на этот счет, но это предмет отдельной публикации.

Что касается интуиционистского истолкования тезиса Черча, то здесь можно отослать читателя к обзору, представленному в статье МакКарти [18].

Примечания

1. Ср.: *Shapiro S.* On the notion of effectiveness // History and Philosophy of Logic. – 1980. – V. 1. – P. 209–230.

2. См., например: *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффекивная вычислимость. – М.: Мир, 1972.

3. Тот факт, что глагол «реализует» в действительном залоге относится здесь к предписанию, которое само ничего не понимает, но должно пониматься, вовсе *не* означает (и именно потому, что предписание *должно пониматься*), что этот глагол можно безоговорочно отнести также к механическому или любому другому физическому устройству самому по себе (без человека). Неплохо бы постоянно иметь это в виду, как это делает, например, Г. Крайзел, который различает *h-effective* (эффективное для человека) и *m-effective* (эффективное для машины). См.: *Kreisel G*. Wich number-theoretic problems can be solved on Π_1^1-paths through 0? // Journal of Symbolic Logic. – 1972. – V. 37. – P. 311–334.

4. См.: *Peter R.* Rekursivität und Konstruktivität // Constructivity in Mathematics: Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam 1957 / Ed. by A. Heyting. – Amsterdam: North-Holland, 1959. – P. 226–233.

5. В пределах данной статьи функция f называется *числовой* или *арифметической*, если и только если $f: N \to N$, где N – множество натуральных чисел.

6. Верен и обратный ход мысли: если имеется неквазиэффективное представление φ вычислимой функции f, то тогда имеется предложение, истинное значение которого непознаваемо (абсолютно неразрешимо), например «Q реализует функцию, описываемую посредством φ», если Q – алгоритм, который реализует f. В самом деле, так как φ неквазиэффективно, это предложение в принципе не может быть установлено, а так как Q реализует функцию, описываемую посредством φ, это предложение истинно и, следовательно, не может быть опровергнуто.

7. Конечно, Тезис Черча можно замаскировать (что часто и делается) под определение: мы *называем* арифметическую функцию вычислимой тогда и только тогда, когда она частично рекурсивна. Но в этом случае мы рискуем, что однажды в будущем кто-либо определит функцию, которая с одной стороны не будет вычислимой в *так* определенном

смысле, а с другой стороны, ее значения могут быть *несомненно* вычислены для любых данных аргументов, на которых она определена.

8. См.: *Kalmar L.* An argument against the plausibility of Church's Thesis // Constructivity in Mathematics... – P. 72–80.

9. Кальмар пишет «эффективно вычислима» вместо «вычислима» в нашей терминологии.

10. *Church A.* The constructive second number class // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1938. – V. 44. – P. 224–232.

11. *Kalmar L.* An argument against the plausibility of Church's Thesis.

12. См.: *Bowie L.G.* An argument against Church's Thesis // Journal of Philosophy. – 1973. – V. LXX. – P. 66–76.

13. Такое название возникло стихийно. При изложении рассматриваемого материала в аудитории перед классной доской удобно пользоваться для нужных записей тремя разноцветными мелками, скажем белым, синим и красным. Белым мелком записываются все логические символы, синим – символы $+$, $\times$, **s**, **0**, **R**, красным – символы $+^{\circ}$, $\times^{\circ}$,$\mathbf{s}^{\circ}$, $\mathbf{0}^{\circ}$, $\mathbf{R}^{\circ}$; при этом начертания символов из обеих групп не зависят от цвета. Тогда упомянутые симметрии приобретают особенно наглядную форму.

14. Эта теорема – легко извлекаемое следствие из более общего результата, а именно из теоремы 2.1, приведенной в другой нашей работе (см.: *Самохвалов К.Ф.* Уточнение обычной интерпретации теорем Геделя о неполноте и понятия рекурсивной перечислимости // Проблемы логики и методологии науки. – Новосибирск: Наука. – 1982. – С. 42–57). См. также: *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., СамохваловК.Ф.* Введение в логику и методологию науки. – М.: Интерпракс; Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1994. (Теорема 2.3.10); *Samokhvalov K.F.* Logic and relativity principle // Логические исследования. – М.: Наука, 2000. – Вып.7. – С. 232–239. (Theorem 1).

15. См., например: *Moschovakis Y.N.* Reviev etc. // J.S.L. – 1968. – V. 33. – P. 471–472.

16. Не следует путать с «гипервычислениями» в технических контекстах, где это слово относится к вычислениям на особенно мощных устройствах таких, например, как компьютеры с распараллеливанием. Здесь же речь идет о более амбициозной идее – идее вычислимости алгоритмами, понимаемыми так широко, что при этом нарушается условие 6 (и, возможно, 7) из раздела 1.1. Быть может, так понимаемые алгоритмы стоило бы называть *гиперaлгоритмами*. Тогда простейшим примером *гиперaлгоритма* можно было бы считать то, что Боуи считает *алгоритмом* для вычисления функции $\boldsymbol{cf}$.

17. См.: *Cotono P.* Hypercomputation and the Physical Church–Turing Thesis // Brit. J. Phil. Sci. – 2003. – V. 54. – P. 181–223.

18. См.: *McCarty C*. Variations on a Thesis: ituitionism and computability // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1987. – V. 28. – P. 536–580.

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск

Samokhvalov, K.F. **The review of arguments against Church's Thesis**

Though Church's Thesis appears on the philosophical-mathematical scene for about 70 years its epistemological status has been still uncertain. The paper focuses on introducing some extra information into debates on this question. For this purpose, Paragraph 2 presents just three attempts to argue against Church's Thesis, but in sum, they are indicative for the chosen standard interpretation. Each of these attempts is analyzed in Paragraph 3.