КАК ЧЕРНЫЙ ЯЩИК ПРЕВРАТИТЬ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ ПРИБОР*

В.Е. Каргальцев, А.А. Москвитин, К.Ф. Самохвалов

В настоящее время общую концепцию измерений принято рассматривать в рамках так называемой «репрезентационной теории измерений». Однако эта теория имеет принципиальный изъян: она не объясняет, откуда берутся измерительные приборы. Восполнить этот пробел – цель статьи.

Ключевые слова: логика, теория измерений, измерительный прибор

1. Эмпирические теории

Читателю априори должно быть ясно, что измерительный прибор – это не просто некоторое физическое устройство, но еще и определенные *ожидания*, относящиеся к наблюдаемому поведению этого устройства (иначе отсутствует интерес к прибору). А будучи точно сформулированными, упомянутые ожидания представляют собой эмпирическую теорию рассматриваемого прибора. Поэтому происхождение любого измерительного прибора нельзя понять, не владея подходящим точным понятием эмпирической теории.

Заметим прежде всего, что всякая эмпирическая теория потому и называется эмпирической, что она высказывается о *наблюдаемых* отношениях. А всякий разговор о наблюдаемом отношении имеет

* Работа поддержана грантом № 47 Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН «Логико-математический анализ выразительных возможностей языка в представлении знания: соотношение синтаксиса, семантики и семиотики в формализации научных теорий» и грантом НШ-335.2008.1.

Хотя статья является развитием работ: *Самохвалов К.Ф.* К обоснованию теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. – Вып. 125: Вычислительные системы. – Новосибирск, 1988. – С. 33–41; *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Введение в логику и методологию науки. – Москва: Интерпракс; Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1994, изложение ведется ab ovo.

Публикуется в авторской редакции.

своим предметом (среди прочего) три вещи: или *само* это отношение как подмножество некоторого множества (объектов, пар объектов, троек объектов и т.д.), или *смысл* отношения как способ (инструкцию) его наблюдения, или *связь* между тем и другим. При этом стоит сразу подчеркнуть, что, во-первых, знать смысл наблюдаемого отношения – это еще не значит знать само отношение (например, мы понимаем смысл отношения между людьми «x выше ростом, чем y», не зная насчет всех землян, кто кого конкретно выше). И во-вторых, не всякое предположение об объемных характеристиках отношения заведомо согласуется с любым его смыслом.

Пусть M, N – произвольные (непустые) классы каких-то эмпирических объектов (тел, полей, событий и т.д.), подлежащих изучению в некотором экспериментальном исследовании. И пусть ρ – некая инструкция по манипулированию объектами из M и N. Пусть для данных натуральных чисел $m \geq 1$ и $n \geq 1$ она применима к каждому кортежу длины $(m + 1) + (n + 1)$, состоящему из кортежа длины $m + 1$ элементов класса N в конкатенации с кортежем $n + 1$ элементов класса M, и предусматривает два возможных исхода («нет» или «да») для любого такого применения. Тогда если инструкция такова, как только что сказано, тройке (N, M, ρ) соответствует наблюдаемое $(m + 1; n + 1)$-местное отношение $R_{NM\rho} \subseteq N^{m+1} \times M^{n+1}$, задаваемое условием

$$(\forall \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1} \in N)(\forall i_1 \ldots i_{n+1} \in M)\ (R_{NM\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_{n+1}) \Leftrightarrow \rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_{n+1}) = \text{да}). \qquad (1)$$

Инструкцию ρ можно рассматривать как способ наблюдения отношения $R_{NM\rho}$ или просто как его *смысл*.

Выбрав M, N и ρ, исследователь, как отмечено выше, еще не обязательно знает все исходы наблюдений отношения $R_{NM\rho}$ с помощью инструкции ρ. Об объемных характеристиках отношения $R_{NM\rho}$ он может, как правило, только гадать. Так вот, любая эмпирическая теория, относящаяся к данным M, N, ρ, как раз и является неким способом *предположительно* указать какую-то объемную характеристику отношения $R_{MN\rho}$, соответствующую, если упомянутое предположение не обманчиво, исходам применения к объектам из M, N инструкции ρ.

Сказать: «Объемная характеристика отношения $R_{MN\rho}$ такая-то и такая-то», – значит сказать: «$R_{NM\rho}$ принадлежит такому-то и такому-то подклассу $\boldsymbol{R}_{NM}$ класса всех возможных (m + 1; n + 1)-местных отношений на N, M». Поэтому *эмпирическая теория* – это четверка (N, M, ρ, $\boldsymbol{R}_{NM}$). Задать такую теорию – значит задать N, M, ρ, $\boldsymbol{R}_{NM}$.

Декларируя такую теорию, исследователь предсказывает (быть может, опрометчиво), что исходы применений инструкции ρ к всевозможным кортежам вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_{n+1})$ образуют какое-то (вообще говоря, неизвестно, какое конкретно) отношение $R_{NM\rho}$, принадлежащее подклассу $\boldsymbol{R}_{NM}$ класса всех возможных (m + 1; n + 1)-местных отношений на N, M.

2. Универсальные эмпирические теории

В простейших (и наиболее фундаментальных) случаях подклассы $\boldsymbol{R}_{NM}$ обычно тривиальны. Более того, они, как правило, единичны (синглетоны) и для каждых M и N содержат в качестве своего единственного члена (m + 1; n + 1)-местное отношение $N^{m+1} \times M^{n+1}$: $\boldsymbol{R}_{NM} = \{N^{m+1} \times M^{n+1}\}$. Эмпирические теории с такими $\boldsymbol{R}_{NM}$ называются *универсальными*.

Таким образом, *декларировать* универсальную (эмпирическую) теорию, относящуюся к данным M, N и ρ, – это *предположить*, что отношение $R_{NM\rho}$ (задаваемое определением (1)) удовлетворяет соотношению

$$(\forall\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in N)\ (\forall i_1, \ldots, i_{n+1} \in M) R_{NM\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_{n+1}). \tag{2}$$

Очевидно, что если M, N бесконечны, то установить неопровержимость такой теории невозможно. Зато если она опровержима, то убедиться в этом можно, обнаружив, если повезет, (m + 1; n + 1)-ку объектов из N и M такую что применение к ней инструкции ρ имеет своим исходом «нет». Иначе говоря, универсальные эмпирические теории *фальсифицируемы*, но, вообще говоря, *не* верифицируемы.

Всякая (m + 1; n + 1)-ка объектов из N и M, фактическое применение к которой инструкции ρ имеет своим исходом «нет», называется *фальсификатором* для рассматриваемой универсальной эмпирической теории.

3. Ранги и сложности

Так как ниже мы будем иметь дело только с универсальными теориями, можно впредь каждую такую теорию отождествлять с тройкой (N, M, ρ) (а не с четверкой $(N, M, \rho, \boldsymbol{R}_{NM})$, как выше).

Условимся называть эту тройку теорией *ранга* $(m + 1, n + 1)$, тем самым явно указывая местность инструкции ρ. Другими словами, мы говорим, что тройка (N, M, ρ) – (*эмпирическая*) *теория ранга* $(m + 1, n + 1)$, если предполагается, что соответствующее ей $(m + 1; n + 1)$-местное отношение R_{NM_ρ} (задаваемое определением (1)), удовлетворяет условию (2).

Если рассматриваемая теория имеет ранг $(m + 1, n + 1)$, то число $\boldsymbol{c} = n + m + 2$ мы называем при этом *сложностью* данной теории. Очевидно, что сложность всегда больше или равна четырем и что одной и той же сложности $\boldsymbol{c}$ отвечает ($\boldsymbol{c}$-3) различных рангов (2, $\boldsymbol{c}$-2), (3, $\boldsymbol{c}$-3), …, ($\boldsymbol{c}$-2, 2).

4. Приемлемые теории

Отнюдь не всегда и отнюдь не всякая универсальная теория имеет научную ценность. Например, может статься так, что в какой-то конкретной тройке (N, M, ρ) классы M и N не содержат объектов, достойных изучения. Или, наоборот, классы M, N интересны, но выбранная инструкция ρ заведомо практически невыполнима. Также могут быть неинтересными ни M, ни N, ни ρ. Поэтому резонно ограничиться рассмотрением для каждых m и n более или менее узких подклассов класса всех мыслимых универсальных эмпирических теорий ранга $(m + 1, n + 1)$. Эти подклассы выделяются предъявлением определенных требований к инструкциям ρ, и требования, о которых идет речь, должны, разумеется, отвечать нашим представлениям о том, с какими инструкциями исследователь заинтересован иметь дело. Обычно тут особое место занимают требования, выделяющие такие инструкции ρ, которые, во-первых, *практически выполнимы* и, во-вторых, сам вид которых обеспечивает возможность *предсказывать* одни результаты наблюдений по другим. Этого рода требования будем называть условием *приемлемости* инструкции ρ. Кроме того, предъявляются требования (назовем их побочными), отражающие и другие аспекты нашего интереса к универсальным теориям. Например, желательно иметь дело с инструкциями ρ, которые просты для понимания, относительно легко осуществимы, удобны для достаточно точного их описания и т.д.

Формулировки соответствующих требований зависят, конечно, от области науки, в которой работает исследователь, от задач, стоящих перед ним, от вкусов исследователя и т.п. Здесь нельзя дать общих рецептов. Но коль скоро условие приемлемости окажется сформулированным, всякую универсальную теорию (N, M, ρ), в которой ρ отвечает ему, будем называть *приемлемой*.

Широкий класс приемлемых теорий (N, M, ρ) составляют те из них, в которых инструкции ρ формулируются и осуществляются с обязательной помощью тех или иных физических устройств и чисел. Такой класс теорий условимся называть *функциональными теориями числовых устройств*.

5. Функциональные теории числовых устройств

Пусть по каким-то критериям выделены два класса N, M вещей и еще одна вещь μ такие что относительно них мы сумели договориться:

в каком именно смысле вещь μ *имеет два входа – первый* и *второй*;

в каком именно смысле *первый вход предназначен для вещей из класса* M, а *второй – для вещей из класса* N;

в каком именно смысле *для произвольной пары вещей* (i, α) *из* $M \times N$ *на входах вещи* μ *вещь* μ *производит некоторое действительное число* $a^{\mu}(i, \alpha)$ *на выходе вещи* μ.

Тогда мы говорим, что мы *имеем числовое устройство* (*числовой черный ящик*) $\mu = (M \times N, \mu, Re)$ *с двумя входами, определенными в* $M \times N$, *и одним числовым выходом, определенным в* Re, *где* Re *– числовая ось.*

Пусть $\boldsymbol{\mu 1} = (M \times N, \mu 1, Re)$ и $\boldsymbol{\mu 2} = (M \times N, \mu 2, Re)$ – числовые устройства; $a^{\mu 1}: M \times N \to Re$ и $a^{\mu 2}: M \times N \to Re$ – соответствующие отображения из $M \times N$ в Re, осуществляемые $\boldsymbol{\mu 1}$ и $\boldsymbol{\mu 2}$. Обычно говорят, что $\boldsymbol{\mu 1}$ и $\boldsymbol{\mu 2}$ (*физически*) *эквивалентны*, если и только если для некоторого взаимно-однозначного отображения γ: $Re \to Re$ имеет место равенство: $a^{\mu 2} = \gamma(a^{\mu 1})$. Это определение – назовем его определением (А) – выглядит естественным, так как оправдание ему состоит просто в том, что при указанном условии всегда можно считать $\boldsymbol{\mu 1}$ и $\boldsymbol{\mu 2}$ точными представлениями друг друга. Тем не менее по некоторым причинам (см. комментарий) мы принимаем *более узкое* определение – обозначим его (Б), – а именно: мы называем $\boldsymbol{\mu 1}$ и $\boldsymbol{\mu 2}$ (физически) эквивалентными *в шкале отношений*, если и только если для некоторого числа $t > 0$ выполняется условие

$$a^{\mu 2} = t\, a^{\mu 1}. \tag{0}$$

Итак, пусть $a^{\mu}: M \times N \to Re$ – отображение из $M \times N$ в Re, осуществляемое каким-то числовым устройством $\mu = (M \times N, \mu, Re)$ с двумя входами и с одним числовым выходом, и пусть f: $Re^{m + nm + n} \to Re$ – произвольная всюду определенная однородная (первой степени) функция от $(m + mn + n)$ переменных. Заметим, что $m + mn + n = (m + 1)(n + 1) – 1$. Рассмотрим инструкцию $\rho(\mu, f, m, n)$ вида:

«*Возьмите произвольную* $(m + 1)$-*ку* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ *объектов из* N *и произвольную* $(n + 1)$-*ку* $(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ *объектов из* M. *С помощью устройства* μ *определите* $(m + 1)(n + 1)$ *чисел* $a^{\mu}(i_1, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_1, \alpha_{m+1}), a^{\mu}(i_2, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_2, \alpha_{m+1}), \ldots, a^{\mu}(i_n, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_n, \alpha_m), a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_{m+1},)$. *Проверьте, выполняется ли равенство*

$$\begin{gathered} a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_{m+1}) = f(a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_m); \\ a^{\mu}(i_1, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_1, \alpha_m), a^{\mu}(i_2, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_2, \alpha_m), \ldots, a^{\mu}(i_n, \alpha_m); \\ a^{\mu}(i_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^{\mu}(i_n, \alpha_{m+1})). \end{gathered} \tag{3}$$

Считайте, что исход применения $\rho(\mu, f, m, n)$ *к паре кортежей* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ *и* $(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ (*т.е. к кортежу* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$) *есть* «да», *если равенство* (3) *выполнено, и* «нет» – *в противном случае*».

Так как f является однородной функцией, инструкция $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$ равно применима и с одинаковыми исходами к любому из физически эквивалентных в шкале отношений числовых устройств. Будь иначе, она была бы физически некорректной и потому неприемлемой на этом классе устройств.

Согласно (1), с помощью этой инструкции наблюдается $(m+1;\ n+1)$-местное эмпирическое отношение $\mathrm{R}_{\boldsymbol{NM}\rho(\boldsymbol{m},\ f,\ m,\ n)}$, задаваемое условием

$$(\forall\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in \boldsymbol{N})(\forall i_1, \ldots, i_{n+1} \in \boldsymbol{M})[\mathrm{R}_{\boldsymbol{NM}\rho(\boldsymbol{m}, f, m, n)} \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}; i_1, \ldots, i_{n+1}) \Leftrightarrow a^u(i_{n+1}, \alpha_{m+1}) = f(a^u(i_{n+1}, \alpha_1), \\ \ldots, a^u(i_{n+1}, \alpha_m); a^u(i_1, \alpha_1), \ldots, a^u(i_n, \alpha_m); \\ a^u(i_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^u(i_n, \alpha_{m+1}))]. \tag{4}$$

Предположим, что $(N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n))$ – эмпирическая теория ранга $(m+1,\ n+1)$, т.е. предположим, что отношение $\mathrm{R}_{\boldsymbol{NM}\rho(\boldsymbol{m}, f, m, n)}$, задаваемое условием (4), универсально на N, M: $\mathrm{R}_{\boldsymbol{NM}\rho(\boldsymbol{m},\ f,\ m,\ n)} = N^{m+1} \times M^{n+1}$. Тогда

$$(\forall i_1, \ldots, i_{n+1} \in M)(\forall\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in N)(a^u(i_{n+1}, \alpha_{m+1}) = \\ f(a^u(i_{n+1}, \alpha_1), \ldots, a^u(i_{n+1}, \alpha_m); a^u(i_1, \alpha_1), \ldots, a^u(i_n, \alpha_m); \\ a^u(i_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^u(i_n, \alpha_{m+1}))). \tag{5}$$

Произвольно зафиксируем кортеж $(\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n)$ объектов из M и кортеж $(\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m)$ объектов из N. (Объекты $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n$ назовем *виртуальными эталонами в M*, а объекты $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m$ – *виртуальными эталонами в N*.) Тогда из (5) следует

$$(\forall i \in M)(\forall\alpha \in N)(a^u(i, \alpha) = f(a^u(i, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u(i, \underline{\alpha}_m); \\ a^u(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m); a^u(\underline{i}_1, \alpha), \ldots, a^u(\underline{i}_n, \alpha))). \tag{6}$$

Заметим, что (6) содержит только два квантора вместо $n+m+2$ и является необходимым условием для (5). Подставляя (6) в (5), имеем

$$(\forall i_1, \ldots, i_{n+1} \in M)(\forall\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in N) \\ (f(a^u(i_{n+1}, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u(i_{n+1}, \underline{\alpha}_m); a^u(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m); \\ a^u(\underline{i}_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^u(\underline{i}_n, \alpha_{m+1})) =$$

$$
\begin{aligned}
&f(f(a^u\,(i_{n+1}, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_{n+1}, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_1)), \ldots,\\
&f(a^u\,(i_{n+1}, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_{n+1}, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_m), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_m));\\
&f(a^u\,(i_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_1, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_1)), \ldots,\\
&f(a^u\,(i_n, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_n, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_m), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_m));\\
&f(a^u\,(i_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_1, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_{m+1})), \ldots,\\
&f(a^u\,(i_n, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(i_n, \underline{\alpha}_m); a^u\,(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m);\\
&a^u\,(\underline{i}_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^u\,(\underline{i}_n, \alpha_{m+1}))). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Следовательно, (7) – также необходимое условие для (5). С другой стороны, (6) и (7) совместно влекут (5). Следовательно, (6) & (7) – необходимое и достаточное условие для (5). Поэтому если мы предположим, что (7) выполнено, то, в этом предположении, (5) эквивалентно (6).

В свою очередь, предположение (7) *гарантированно* (вне зависимости от того, каковы M, N и виртуальные эталонные кортежи $(\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n)$, $(\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m)$) выполняется тогда и только тогда, когда f является каким-либо решением (в классе всюду определенных функций от $(m + mn + n)$ переменных) следующего *функционального* уравнения:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, \ldots x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; z_1, \ldots, z_n) =\\
&f(f(x_1, \ldots, x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ {}^1t_1, \ldots, {}^1t_n), \ldots,\\
&\quad f(x_1, \ldots, x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ {}^mt_1, \ldots, {}^mt_n);\\
&\qquad f({}^1u_1, \ldots, {}^1u_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^1t_1, \ldots, {}^1t_n), \ldots,\\
&\qquad f({}^1u_1, \ldots, {}^1u_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^mt_1, \ldots, {}^mt_n); \ldots;\\
&\qquad f({}^nu_1, \ldots, {}^nu_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^1t_1, \ldots, {}^1t_n), \ldots,\\
&\qquad f({}^nu_1, \ldots, {}^nu_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^mt_1, \ldots, {}^mt_n);\\
&\qquad f({}^1u_1, \ldots, {}^1u_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ z_1, \ldots, z_n); \ldots,\\
&\qquad f({}^nu_1, \ldots, {}^nu_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ z_1, \ldots, z_n)). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Заметим, что вид этого уравнения полностью определяется двумя натуральными числами n и m, т.е. рангом $(m + 1, n + 1)$ рассматриваемой теории. Поэтому всякое уравнение вида (8) естественно назвать *ранговым* (*с рангом* $(m + 1, n + 1)$).

Уравнение (8) – требование, которое налагается на инструкции $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$ предположением, что эмпирическое отношение $\mathrm{R}_{\boldsymbol{NM}\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)}$, задаваемое условием (4), универсально на M, N. Отсюда прямо следует, что любая тройка вида $(N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n))$ заведомо не является универсальной теорией, если f не является каким-либо однородным решением уравнения (8).

С другой стороны, если f является некоторым однородным решением уравнения (8), то это совсем не значит, что тройку вида $(N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n))$ уже допустимо декларировать (опрометчиво или нет) в качестве приемлемой теории. На самом деле должно выполняться более сильное условие, к описанию которого мы сейчас приступаем.

Пусть F – класс всех функций из Re^{m+nm+n} в Re; g, h – F.

Мы говорим, что функция *h получена путем малого* (порядка малости $o(\rho)$) *возмущения функции g в* (*фиксированной*) *точке* $\boldsymbol{R}$ – Re^{m+nm+n}, если в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{R}$ функция $g(R)$ единственным образом может быть представлена в виде

$$g(R) = h(R) + o(\rho), \tag{9}$$

где ρ – расстояние между точками R и $\boldsymbol{R}$.

Пусть $g(R)$ – однородное решение уравнения (8). Мы называем это решение *устойчивым к малым* (порядка малости $o(\rho)$) *возмущениям в* (*точке*) $\boldsymbol{R}$, если и только если имеет место разложение (9) и $h(R)$ также является однородным решением уравнения (8).

Так как абсолютно точные вычисления почти всегда практически невозможны, то в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{R}$ мы практически не различаем $g(R)$ и $h(R)$, если имеет место (9). Поэтому оправданно следующее условие (назовем его *контрольным*), накладываемое на инструкцию $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$, необходимое и достаточное для того, чтобы тройку вида $(N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n))$ можно было бы декларировать (опрометчиво или нет, но физически осмысленно) в качестве универсальной теории. Именно: функция f должна быть однородным решением уравнения (8), устойчивым к малым возмущениям в каждой точке $\boldsymbol{R}$; такое решение впредь будем называть просто *устойчивым*.

Таким образом, если и только если f является устойчивым решением уравнения (8), мы называем тройку рассматриваемого вида *функциональной теорией* (*ранга* ($m + 1$, $n + 1$), *в шкале отношений*) *числового устройства* $\boldsymbol{\mu}$ *с двумя входами, определенными в* $M \times N$, *и одним числовым выходом, определенным в* Re.

Мы называем (*числовым*) *f-устройством* (*ранга* ($m + 1$, $n + 1$), *в шкале отношений*) всякую пару $D = (\boldsymbol{\mu}, T)$, если и только если $\boldsymbol{\mu}$ – числовое устройство ($M \times N$, m, Re); T – функциональная теория (N, M, $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$) ранга ($m + 1$, $n + 1$), в шкале отношений) числового устройства $\boldsymbol{\mu}$.

Мы уже сказали, что всякая универсальная эмпирическая теория фальсифицируема, но, вообще говоря, неверифицируема. Значит, декларируя функциональную теорию T числового устройства $\boldsymbol{\mu}$, мы никогда не имеем полной уверенности в том, что эта декларация не опрометчива. Зато когда эта декларация опрометчива, то в этом мы сможем убедиться, если *фактически* обнаружим какой-либо фальсификатор для рассматриваемой теории.

До тех пор пока такой фальсификатор не обнаружен, мы *считаем* (*верим*), что декларация теории (N, M, $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$) не опрометчива. Мы можем выразить эту *веру* словами: «Числовое f-устройство $D = (\boldsymbol{\mu}, T)$ (в шкале отношений) *допустимо* считать *кондиционным*». Однако если нам удалось фактически обнаружить какой-либо фальсификатор для теории (N, M, $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$), то мы *утверждаем* (а не просто предполагаем и верим), что рассматриваемое числовое f-устройство не является кондиционным.

6. Измерительные приборы

Итак, пусть мы имеем числовой черный ящик $\boldsymbol{\mu} = (M \times N, \mu, Re)$. Если мы снабдим (по своему выбору) этот черный ящик функциональной теорией T вида (N, M, $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$), то мы получим числовое f-устройство $D = (\boldsymbol{\mu}, T)$ ранга ($m + 1$, $n + 1$) в шкале отношений. А если при этом мы еще и фиксируем *эталонный кортеж* $\boldsymbol{e}_{m,n}$ вида ($\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m$; $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n$), – $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n \in M$, $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m \in N$, – длины ($m + n$), то пару $M\mathrm{et}_{m,n} = (\boldsymbol{e}_{m,n}, D)$ мы будем называть *измерительным f-прибором* *ранга* $(m+1, n+1)$ (в шкале отношений) *с двумя входами*. В этом случае *измеряемой величиной* (*в шкале отношений*) является $a^{\mu}(i, \alpha)$.

Если же мы фиксируем *эталонный кортеж* $\boldsymbol{e}_{m+1,n}$ вида $(\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m, \underline{\alpha}_{m+1}; \underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n)$, – $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n \in M$, $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m, \underline{\alpha}_{m+1} \in N$, – длины $(m+1+n)$, то пару $M\mathrm{et}_{m+1,n} = (\boldsymbol{e}_{m+1,n}, D)$ мы будем называть *измерительным f-прибором ранга* $(m+1, n+1)$ (в шкале отношений) *с одним* $\boldsymbol{i}$*-входом*. В этом случае *измеряемой величиной* (*в шкале отношений*) является $b^{\mu}(i) = a^{\mu}(i, \underline{\alpha}_{m+1})$.

Наконец, если мы фиксируем *эталонный кортеж* $\boldsymbol{e}_{m,n+1}$, вида $(\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m; \underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n\, \underline{i}_{n+1})$, – $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n, i_{n+1} \in M$, $\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m \in N$, – длины $(m+n+1)$, то пару $M\mathrm{et}_{m,n+1} = (\boldsymbol{e}_{m,n+1}, D)$ будем называть *измерительным f-прибором ранга* $(m+1, n+1)$ (в шкале отношений) *с одним* $\boldsymbol{\alpha}$*-входом*. В этом случае *измеряемой величиной* (*в шкале отношений*) является $b^{\mu}(i) = a^{\mu}(\underline{i}_{n+1}, \alpha)$.

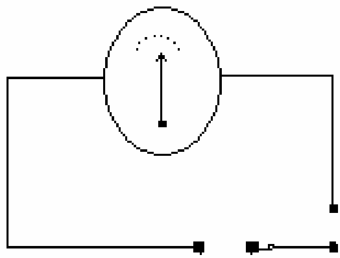
Конечно, можно было бы расширить понятие измерительного прибора, дополнительно считая таковым само по себе числовое устройство D, а не только пары $(\boldsymbol{e}_{m,n}, D)$, $(\boldsymbol{e}_{m+1,n}, D)$, $(\boldsymbol{e}_{m+1,n}, D)$. В этом случае пришлось бы также считать, что прибор измеряет физическую величину в шкале отношений, представляемую кортежем $(a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_{m+1}), a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(i_{n+1}, \alpha_m); a^{\mu}(i_1, \alpha_1), \ldots, a^{\mu}(\mathrm{i}_n, \alpha_m); a^{\mu}(i_1, \alpha_{m+1}), \ldots, a^{\mu}(\mathrm{i}_n, \alpha_{m+1}))$ длины $(m+1)(n+1)$. Однако в рамках статьи подобное усложнение терминологии не является целесообразным.

Таким образом, декларируя числовой черный ящик $\boldsymbol{\mu} = (M \times N, m, Re)$ как числовое f-устройство ранга $(m+1, n+1)$ и выбирая при этом произвольно эталонный кортеж вида $\boldsymbol{e}_{m,n}$ (или $\boldsymbol{e}_{m+1,n}$, или $\boldsymbol{e}_{m,n+1}$), мы тем самым декларируем $\boldsymbol{m}$ как измерительный f-прибор ранга $(m+1, n+1)$ с двумя входами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ (или с одним $\boldsymbol{i}$-входом, или с одним $\boldsymbol{\alpha}$-входом).

Поясним сказанное примером. Рассмотрим устройство, изображенное на рисунке. Это электрическая схема, которая содержит квазигальванометр μ и имеет четыре клеммы. Нижние две клеммы предназначены для подключения всевозможных резисторов, две боковые – для всевозможных батареек. Резисторы образуют класс M, батарейки – класс N. Квазигальванометр μ – нечто внешне неотличимое от того, что мы привыкли называть гальванометром (быть может, испорченный гальванометр, а быть может, и нет).

Мы говорим, что на первый вход подается объект $i \in M$, если к нижним клеммам присоединяется резистор i. И мы говорим, что на второй вход подается объект $\alpha \in N$, если к боковым клеммам присоединяется батарейка α.

Когда на входы поданы i и α, стрелка квазигальванометра μ указывает значение $a^{\mu}(i, \alpha)$. В целом вся эта схема, вместе с указанными оговорками и соглашениями, – это конкретный числовой черный ящик $\boldsymbol{\mu} = (M \times N, \mu, Re)$.



Допустим, мы собираемся рассматривать не просто наш черный ящик $\boldsymbol{\mu}$, а пару $D = (\boldsymbol{\mu}, T)$, где T – функциональная теория $(N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, 1, 1))$ ранга (2, 2). Тогда эта пара D – конкретное (числовое) f-устройство ранга (2, 2).

Допустим теперь, что мы собираемся рассматривать пару $Met_{1,1} = (\boldsymbol{e}_{1,1}, D)$, где $\boldsymbol{e}_{1,1} = (\underline{\text{батарейка}_1}, \underline{\text{резистор}_1})$ – эталонный кортеж длины 2 из одного произвольно выбранного эталонного резистора (обозначим его через $\underline{i}_1$) и одной произвольно выбранной эталонной батарейки (обозначим ее через $\underline{\alpha}_1$). Тогда это значит, что мы продекларировали наш черный ящик $\boldsymbol{\mu}$ как измерительный f-прибор $Met_{1,1}$ ранга (2, 2) с двумя входами. По понятным любому электротехнику соображениям прибор $Met_{1,1}$ естественно назвать *квазиамперметром*.

Если же мы собираемся рассматривать пару $Met_{2,1} = (\boldsymbol{e}_{2,1}, D)$, где $\boldsymbol{e}_{2,1} = (\underline{\text{батарейка}_1}, \underline{\text{батарейка}_2}, \underline{\text{резистор}_1})$ – эталонный кортеж длины 3 из одного произвольно выбранного эталонного резистора (обозначим его снова через $\underline{i}_1$) и двух произвольно выбранных эталонных батареек (обозначим их через $\underline{\alpha}_1$, $\underline{\alpha}_2$), то мы тем самым декларируем черный ящик **μ** как измерительный f-прибор $Met_{2,1}$, ранга (2, 2) с одним ***i***-входом. Прибор $Met_{2,1}$ естественно назвать *квазиомметром*.

Если, наконец, мы собираемся рассматривать пару $Met_{1,2} = (\boldsymbol{e}_{1,2}, D)$, где $\boldsymbol{e}_{1,2}$ = (батарейка$_1$, резистор$_1$, резистор$_2$) – эталонный кортеж длины 3 из двух произвольно выбранных эталонных резисторов (обозначим их через $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$) и одной произвольно выбранной эталонной батарейки (обозначим ее снова через $\underline{\alpha}_1$), то мы тем самым декларируем черный ящик **μ** как измерительный f-прибор $Met_{1,2}$ ранга (2, 2) с одним **α**-входом. Прибор $Met_{1,2}$ естественно назвать *квазивольтметром*.

Этот пример, мы надеемся, поможет читателю осознать, что немалая часть известных ему измерительных приборов может быть описана в терминах $Met_{mn,}$, $Met_{m+1,\ n}$ или $Met_{m,n+1}$.

Однако, дабы не загромождать изложение непринципиальными деталями, ниже мы будем говорить только об измерительных f-приборах вида $Met_{m,n}$, предоставляя читателю самому вести параллельные рассуждения относительно измерительных f-приборов вида $Met_{m+1,n}$ или вида $Met_{m,n+1}$.

Таким образом, рождение (введение в научный обиход) любого измерительного прибора обеспечивается последовательным осуществлением следующих этапов:

1) заданием некоторого конкретного числового черного ящика **μ** = $(M\times N, \mu, Re)$;

2) заданием некоторого конкретного ранга (упорядоченной пары натуральных чисел) $(m + 1, n + 1)$;

3) заданием произвольной всюду определенной однородной функции f: $Re^{m+nm+n} \to Re$;

4) проверкой, является или нет заданная на предыдущем этапе функция f устойчивым решением уравнения (8);

5) декларацией теории (провозглашением гипотезы) $T = (N, M, \rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n))$, если этап (4) завершился ответом «удовлетворяет», и новым повторением этапа (3), если этап (4) завершился ответом «не удовлетворяет»;

6) декларацией числового черного ящика **μ** как числового f-устройства $D = (\boldsymbol{\mu}, T)$ ранга $(m + 1, n + 1)$ в шкале отношений;

7) произвольным выбором эталонного кортежа $\boldsymbol{e}_{m,n}$;

8) объявлением пары $(\boldsymbol{e}_{m,n}, D)$ измерительным f-прибором $Met_{m,n}$ *ранга* $(m + 1, n + 1)$ в шкале отношений *с двумя входами*;

9) экспериментальными попытками установить некондиционность числового *f*-устройства *D* и тем самым некондиционность прибора $Met_{m,n}$;

10) временным провозглашением прибора $Met_{m,n}$ кондиционным, если эти попытки не удались, или окончательным утверждением, что превращение черного ящика $\boldsymbol{\mu}$ в измерительный прибор, именно в $Met_{m,n}$, невозможно, если указанные попытки удались.

Заметим, что от произвольных выборов зависит осуществление только этапов (1) – (3) и (9), причем только выбор на этапе (3) можно осмысленно квалифицировать на этапе (4) как правильный или как неправильный. Поэтому этапы (3) и (4) естественно назвать *критическими* и более внимательно рассмотреть их в следующем разделе.

7. Анализ критических этапов

Коль скоро на предыдущем этапе был зафиксирован ранг (m + 1, n + 1), то задать на третьем этапе однородную ($m + nm + n$)-местную функцию f: $Re^{m+nm+n} \to Re$ мы можем, в принципе, совершенно произвольно, не заботясь о том, ошибочно или не ошибочно был осуществлен нами выбор для задания именно этой функции. Все равно на последующем этапе мы отсеем ошибочный выбор, проверив, является ли или нет выбранная функция устойчивым решением уравнения (8). Если не является, мы сделаем другой выбор и вновь повторим проверку или все начнем сначала, с первого этапа. И так далее.

Однако этот хаотический способ построения измерительного прибора наудачу не является самым разумным. Разумнее сначала как-то ограничить пространство для возможных выборов функций f в зависимости от тех или иных наших представлений о том, с какими инструкциями $\rho(\boldsymbol{\mu}, f, m, n)$ мы предпочитаем иметь дело. В этой связи стоит упомянуть два наиболее важных случая: 1) поиск решений функционального уравнения (8) в классе однородных линейных функций от r переменных, где $r = m + nm + n$; 2) поиск устойчивых решений уравнения (8) в классе однородных аналитических функций от r переменных, где $r = m + nm + n$.

Заметим, что всякое однородное линейное решение уравнения (8) является тривиальным образом заведомо устойчивым (для однородной линейной функции g соотношение (9) имеет место тогда и только тогда, когда $h = g$).

Случай 1. Мы полагаем, что

$$f(R) = B_1x_1 + \ldots + B_mx_m + C_{11}y_{11} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + \ldots + D_nz_n, \qquad (10)$$

где: $B_1, \ldots, B_m, C_{11}, \ldots, C_{nm}, \ldots, D_1, \ldots, D_n$ – числа; $R = (x_1, \ldots x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; z_1, \ldots, z_n)$ – произвольная $(m + mn + n)$-мерная точка.

Допустим, что $f(R)$ удовлетворяет функциональному уравнению (8). Тогда имеет место следующее тождество:

$$f(R) = f(R^*), \qquad (11)$$

где:

$$R^* = (f(M_1), \ldots, f(M_m); f(M_{11}), \ldots, f(M_{mn}); f(N_1), \ldots, f(N_n)); \qquad (12)$$
$$M_1 = (x_1, \ldots, x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ {}^1t_1, \ldots, {}^1t_n), \qquad (12_1)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$M_m = (x_1, \ldots, x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm};\ {}^mt_1, \ldots, {}^mt_n); \qquad (12_m)$$

$$M_{11} = ({}^1u_1, \ldots, {}^1u_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^1t_1, \ldots, {}^1t_n), \qquad (13_1)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$M_{mn} = ({}^nu_1, \ldots, {}^nu_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; {}^mt_1, \ldots, {}^mt_n); \qquad (13_{nm})$$

$$N_1 = ({}^1u_1, \ldots, {}^1u_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; z_1, \ldots, z_n), \qquad (14_1)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$N_n = ({}^nu_1, \ldots, {}^nu_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; z_1, \ldots, z_n); \qquad (14_n)$$

$$f(R^*) = A + B_1f(M_1) + \ldots + B_mf(M_m) + C_{11}f(M_{11}) + \ldots + C_{nm}f(M_{nm}) + D_1f(N_1) + \ldots + D_nf(N_n). \qquad (15)$$

Подставляя в (15) вместо $f(M_1), \ldots, f(N_n)$ их развернутые выражения, получаем

$$f(R^*) = B_1(B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_mx_m + C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + D_1\,{}^1t_1 + D_2\,{}^1t_2 + \ldots + D_n\,{}^1t_n) +$$

$$
\begin{gathered}
+ B_2(B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_mx_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^2t_1 + D_2{}^2t_2 + \ldots + D_n{}^2t_n) + \\
+ B_m(B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_mx_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^mt_1 + D_2{}^mt_2 + \ldots + D_n{}^mt_n) + \\
+ C_{11}(B_1{}^1u_1 + B_2{}^1u_2 + \ldots + B_m{}^1u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}(y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^1t_1 + D_2{}^1t_2 + \ldots + D_n{}^1t_n) + \\
+ C_{12}(B_1{}^1u_1 + B_2{}^1u_2 + \ldots + B_m{}^1u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^2t_1 + D_2{}^2t_2 + \ldots + D_n{}^2t_n) + \\
+ C_{1m}(B_1{}^1u_1 + B_2{}^1u_2 + \ldots + B_m{}^1u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^mt_1 + D_2{}^mt_2 + \ldots + D_n{}^mt_n) + \\
+ C_{21}(B_1{}^2u_1 + B_2{}^2u_2 + \ldots + B_m{}^2u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^1t_1 + D_2{}^1t_2 + \ldots + D_n{}^1t_n) + \\
+ C_{22}(B_1{}^2u_1 + B_2{}^2u_2 + \ldots + B_m{}^2u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{\text{т}m}y_{nm} + \\
D_1{}^1t_1 + D_2{}^1t_2 + \ldots + D_n{}^1t_n) + \\
+ C_{2m}(B_1{}^2u_1 + B_2{}^2u_2 + \ldots + B_m{}^2u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^mt_1 + D_2{}^mt_2 + \ldots + D_n{}^mt_n) + \\
+ C_{n1}(B_1{}^nu_1 + B_2{}^nu_2 + \ldots + B_m{}^nu_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^1t_1 + D_2{}^1t_2 + \ldots + D_n{}^1t_n) + \\
+ C_{n2}(B_1{}^nu_1 + B_2{}^nu_2 + \ldots + B_m{}^nu_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^2t_1 + D_2{}^2t_2 + \ldots + D_n{}^2t_n) + \\
+ C_{nm}(B_1{}^nu_1 + B_2{}^nu_2 + \ldots + B_m{}^nu_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1{}^mt_1 + D_2{}^mt_2 + \ldots + D_n{}^mt_n) + \\
+ D_1\ (B_1{}^1u_1 + B_2{}^1u_2 + \ldots + B_m{}^1u_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1z_1 + \ldots + D_nz_n) + \\
+ D_n(B_1{}^nu_1 + B_2{}^nu_2 + \ldots + B_m{}^nu_m + \\
C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + \\
D_1z_1 + \ldots + D_nz_n).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Таким образом, приравнивая выражение (16) к выражению (10), мы получаем развернутое выражение для тождества (11). Приравнивая в этом развернутом выражении для тождества (11) коэффициенты при одинаковых переменных слева и справа, мы после очевидных преобразований получаем следующую систему уравнений относительно чисел $B_1, \ldots, B_m, C_{11}, \ldots, C_{nm}, \ldots, D_1, \ldots, D_n$:

$$B_1 = B_1(B_1 + \ldots + B_m), \qquad (17_1)$$
. . . . . .
$$B_m = B_m(B_1 + \ldots + B_m); \qquad (17_m)$$

$$C_{11} = C_{11}(B_1 + \ldots + B_m + C_{11} + \ldots + C_{nm} + D_1 + \ldots + D_n), \qquad (18_{11})$$
. . . . . .
$$C_{mn} = C_{nm}(B_1 + \ldots + B_m + C_{11} + \ldots + C_{nm} + D_1 + \ldots + D_n); \qquad (18_{mn})$$

$$D_1 = D_1(D_1 + \ldots + D_n), \qquad (19_1)$$
. . . . . .
$$D_n = D_n(D_1 + \ldots + D_n); \qquad (19_n)$$

$$0 = D_1(B_1 + C_{11} + C_{21} + \ldots + C_{n1}), \qquad ({}^{1}20_1)$$
. . . . . .
$$0 = D_n(B_1 + C_{11} + C_{21} + \ldots + C_{n1}); \qquad ({}^{1}20_n)$$

$$0 = D_1(B_2 + C_{12} + C_{22} + \ldots + C_{n2}), \qquad ({}^{2}20_1)$$
. . . . . .
$$0 = D_n(B_2 + C_{12} + C_{22} + \ldots + C_{n2}); \qquad ({}^{2}20_n)$$
+ + + + + +
$$0 = D_1(B_m + C_{1m} + C_{2m} + \ldots + C_{nm}), \qquad ({}^{m}20_1)$$
. . . . . .
$$0 = D_n(B_m + C_{1m} + C_{2m} + \ldots + C_{nm}); \qquad ({}^{m}20_n)$$

$$0 = B_1(C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1m} + D_1), \qquad ({}^{1}21_1)$$
. . . . . .
$$0 = B_m(C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1m} + D_1); \qquad ({}^{1}21_m)$$

$$0 = B_1(C_{21} + C_{22} + \ldots + C_{2m} + D_2), \qquad ({}^{2}21_1)$$
. . . . . .
$$0 = B_m(C_{21} + C_{22} + \ldots + C_{2m} + D_2); \qquad ({}^{2}21_m)$$
+ + + + + +
$$0 = B_1(C_{n1} + C_{n2} + \ldots + C_{nm} + D_n); \qquad ({}^{n}21_1)$$

. . . . . .

$$0 = B_m(C_{n1} + C_{n2} + ... + C_{nm} + D_n). \qquad ({}^n21_m)$$

Решив эту систему и введя сокращения $B \equiv B_1 + \ldots + B_m$, $C \equiv C_{11} + \ldots + C_{nm}$, $D \equiv D_1 + \ldots + D_n$, имеем следующее предварительное утверждение (лемму): *если линейная однородная функция*

$$f(R) = B_1x_1 + \ldots + B_mx_m + C_{11}y_{11} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + \ldots + D_nz_n$$

является решением уравнения (8), *то выполняются одно из следующих условий*:

1) $f(R) = 0$;
2) $f(R) = D_1z_1 + . . . + D_nz_n$, где $D =1$;
3) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm}$, где $C =1$;
4) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + . . . + D_nz_n$, где $C = 0$, $D =1$;
5) $f(R) = B_1x_1 + . . . + B_mx_m$, *где* $B =1$;
6) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} + B_1x_1 + . . . + B_mx_m$, где $C = 0$, $B =1$;
7) $f(R) = B_1x_1 + . . . + B_mx_m + C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + . . . + D_n(R)z_n$, где $B = D =1$, $C = –1$.

С другой стороны, подставляя любую из этих семи функций в равенство (8), легко непосредственно убедиться, что при такой подстановке (8) обращается в тождество. Стало быть, окончательно мы имеем утверждение: *линейная однородная функция*

$$f(R) = B_1x_1 + \ldots + B_mx_m + C_{11}y_{11} + \ldots + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + \ldots + D_nz_n$$

является решением уравнения (8), *если и только если выполняются любое из следующих условий*:

1) $f(R) = 0$;
2) $f(R) = D_1z_1 + . . . + D_nz_n$, где $D =1$;
3) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm}$, где $C =1$;
4) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} + D_1z_1 + . . . + D_nz_n$, где $C = 0$, $D =1$;
5) $f(R) = B_1x_1 + . . . + B_mx_m$, где $B =1$;
6) $f(R) = C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} + B_1x_1 + . . . + B_mx_m$, где $C = 0$, $B =1$;
7) $f(R) = B_1x_1 + . . . + B_mx_m + C_{11}y_{11} + . . . + C_{nm}y_{nm} +$

$D_1z_1 + \ldots + D_nz_n$, где $B = D = 1$, $C = -1$.

Заметим межу прочим, что из этого утверждения сразу вытекает частное утверждение для ранга (2, 2): *линейная однородная функция*

$$f(x, y, z) = Bx + Cy + Dz$$

является решением уравнения (8) *ранга* (2, 2), *если и только если выполняются любое из следующих условий*:

$f(x, y, z) = 0$;
$f(x, y, z) = x$;
$f(x, y, z) = y$;
$f(x, y, z) = z$;
$f(x, y, z) = x - y + z$.

Случай 2. Оговорим особенности поиска решений уравнения (8) в классе однородных аналитических функций от r переменных, где $r = m + nm + n$.

Допустим, мы интересуемся аналитической функцией $f(R)$ в достаточно малой окрестности какой-то точки $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_m}; \boldsymbol{y_{11}}, \ldots, \boldsymbol{y_{nm}}; \boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_n})$. Тогда эта функция может быть единственным образом представлена бесконечным разложением в ряд (Тейлора) по степеням k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, произведений $(x_1 - \boldsymbol{x_1})^{\lambda 1} \ldots (x_r - \boldsymbol{x_r})^{\lambda r}$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = k$. При этом начальный отрезок этого ряда, содержащий $m + nm + n + 1$ одночленов, совпадает с полиномом $P_{\boldsymbol{R}}(R)$ вида

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{R}}(R) = f(\boldsymbol{R}) + {} & \\ & B_1(\boldsymbol{R})(x_1 - \boldsymbol{x_1}) + \ldots + B_m(\boldsymbol{R})(x_m - \boldsymbol{x_m}) + \\ & C_{11}(\boldsymbol{R})(y_{11} - \boldsymbol{y_{11}}) + \ldots + C_{nm}(\boldsymbol{R})(y_{nm} - \boldsymbol{y_{nm}}) + \\ & D_1(\boldsymbol{R})(z_1 - \boldsymbol{z_1}) + \ldots + D_n(\boldsymbol{R})(z_n - \boldsymbol{z_n}), \end{aligned} \tag{22}$$

где $B_1(\boldsymbol{R}), \ldots, B_m(\boldsymbol{R}), C_{11}(\boldsymbol{R}), \ldots, C_{nm}(\boldsymbol{R}), D_1(\boldsymbol{R}), \ldots, D_n(\boldsymbol{R})$ – частные производные $f(R)$ в $\boldsymbol{R}$ по $x_1, \ldots, x_m; y_{11}, \ldots, y_{nm}; z_1, \ldots, z_n$ соответственно. С другой стороны, $f(\boldsymbol{R})$ по теореме Эйлера удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{R}) = {} & B_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_1} + \ldots + B_m(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_m} + \\ & C_{11}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{11}} + \ldots + C_{nm}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{nm}} + \\ & D_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_1} + \ldots + D_n(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), имеем

$$P_{\boldsymbol{R}}(R) = B_1(\boldsymbol{R})x_1 + \ldots + B_m(\boldsymbol{R})x_m + C_{11}(\boldsymbol{R})y_{11} + \ldots + C_{nm}(\boldsymbol{R})y_{nm} + D_1(\boldsymbol{R})z_1 + \ldots + D_n(\boldsymbol{R})z_n. \tag{24}$$

Стало быть в окрестности точки $\boldsymbol{R}$ имеет место разложение $f(R) = P_{\boldsymbol{R}}(R) + o(\rho)$, где ρ – расстояние между точками R и $\boldsymbol{R}$. Отсюда следует, что любое однородное аналитическое решение функционального уравнения (8) сколь угодно мало отличается в окрестности точки $\boldsymbol{R}$ от какой-то линейной функции, совпадая с нею в самой точке $\boldsymbol{R}$. Разумеется, отсюда еще нельзя заключить, что эта линейная функция сама является решением уравнения (8). В общем случае это не так. Однако нас интересует не общий случай, а случай устойчивого решения. Учитывая это обстоятельство и учитывая результаты анализа случая 1, мы получаем следующее утверждение. *Однородная аналитическая функция* $f(R)$ *тогда и только тогда является устойчивым решением функционального уравнения* (8), *когда для каждой фиксированной точки* $\boldsymbol{R}$ *выполняется любое из следующих условий*:

1) $f(\boldsymbol{R}) = 0$;
2) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{D}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_1} + \ldots + \mathrm{D}_n(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_n}$, где $\mathrm{D}(\boldsymbol{R}) = 1$;
3) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{C}_{11}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{11}} + \ldots + \mathrm{C}_{nm}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{nm}}$, где $\mathrm{C}(\boldsymbol{R}) = 1$;
4) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{C}_{11}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{11}} + \ldots + \mathrm{C}_{nm}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{nm}} + \mathrm{D}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_1} + \ldots + \mathrm{D}_n(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_n}$, где $\mathrm{C}(\boldsymbol{R}) = 0$, $\mathrm{D}(\boldsymbol{R}) = 1$;
5) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{B}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_1} + \ldots + \mathrm{B}_m(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_m}$, *где* $\mathrm{B}(\boldsymbol{R}) = 1$;
6) $f(R) = \mathrm{C}_{11}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{11}} + \ldots + \mathrm{C}_{nm}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{nm}} + \mathrm{B}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_1} + \ldots + \mathrm{B}_m(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_m}$, где $\mathrm{C}(\boldsymbol{R}) = 0$, $\mathrm{B}(\boldsymbol{R}) = 1$;
7) $f(\boldsymbol{R}) = \mathrm{B}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_1} + \ldots + \mathrm{B}_m(\boldsymbol{R})\boldsymbol{x_m} + \mathrm{C}_{11}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{11}} + \ldots + \mathrm{C}_{nm}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{y_{nm}} + \mathrm{D}_1(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_1} + \ldots + \mathrm{D}_n(\boldsymbol{R})\boldsymbol{z_n}$, *где* $\mathrm{B}(\boldsymbol{R}) = \mathrm{D}(\boldsymbol{R}) = 1$, $\mathrm{C}(\boldsymbol{R}) = -1$.

В этом утверждении приняты обозначения, параллельные обозначениям, использованным при обсуждении случая 1. Отличие только в том, что теперь все фигурирующие значения коэффициентов при переменных в условиях (1) – (7) могут меняться от точки к точке.

8. Экспериментальные попытки установить некондиционность измерительного прибора

Как явствует из раздела 6, рождение (введение в научный обиход) любого измерительного прибора вида $Met_{m,n}$ (в шкале отношений) обеспечивается последовательным осуществлением 10 этапов. После раздела 7 читатель знает, в чем состоит осуществление первых восьми этапов. В настоящем разделе даются соответствующие пояснения относительно оставшихся двух этапов. Причем эти пояснения несколько различаются для упомянутых выше случаев 1 и 2.

Итак, в случае 1 мы считаем, что к началу девятого этапа уже декларирован конкретный прибор вида $Met_{m,n}$. Это означает, что (а) экспериментатор располагает некоторым (произвольно выбранном на предыдущих этапах) эталонным кортежем ($\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m; \underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n$) длины $m + n$ и некоторой конкретной линейной однородной функцией $f(R)$ одного из семи видов, указанных в предыдущем разделе для случая 1. Этап начинается с того, что (б) к кортежу ($\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m;$ $\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n$) добавляются еще два объекта i, α и рассматривается кортеж ($\alpha, \underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m; \underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n, i$) длины $m + n + 2$. Далее (в) экспериментально находятся $m + mn + n + 1$ чисел $a^{\text{ц}}(i, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^{\text{ц}}(i, \underline{\alpha}_m), a^{\text{ц}}(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^{\text{ц}}(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m), a^{\text{ц}}(\underline{i}_1, \alpha), \ldots, a^{\text{ц}}(\underline{i}_n, \alpha), a^{\text{ц}}(i, \alpha)$. Потом (г) из этих чисел, исключая последнее, составляется кортеж $\boldsymbol{R} = a^{\text{ц}}(i, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^{\text{ц}}(i, \underline{\alpha}_m); a^{\text{ц}}(\underline{i}_1, \underline{\alpha}_1), \ldots, a^{\text{ц}}(\underline{i}_n, \underline{\alpha}_m); a^{\text{ц}}(\underline{i}_1, \alpha), \ldots, a^{\text{ц}}(\underline{i}_n, \alpha)$. Затем (д) вычисляется значение $f(\boldsymbol{R})$ функции $f(R)$ в точке $\boldsymbol{R}$. Потом (е) проверяется с той точностью, какая только доступна практически, выполняется ли или нет неравенство $f(\boldsymbol{R}) \neq a^{\text{ц}}(i, \alpha)$. Наконец, (ж) принимается *отрицательное* решение: «декларированный на прежних этапах прибор $Met_{m,n}$ некондидиционен», если неравенство выполняется, и принимается *неотрицательное* решение: «повторить пункты (б) – (ж) с другими объектами i, α, добавляемыми в пункте (б).

Этап (9) заканчивается при двух условиях. Во-первых, тогда, когда нашлись i, α такие, для которых принимается отрицательное решение. Во-вторых, тогда, когда истощились наличные ресурсы (имеющиеся для испытаний объекты из M и N, имеющееся время и т.д).

Этап (10) очевиден.

Случай 2 отличается от случая 1. Это отличие состоит, во-первых, в том, что теперь пункт (а) звучит короче, а именно: экспериментатор располагает некоторым (произвольно выбранным на предыдущих этапах) эталонным кортежем ($\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m; \underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_n$) длины $m + n$. Во-вторых, отличие заключается в том, что пункт (д) звучит теперь длиннее, а именно: для данного кортежа $\boldsymbol{R}$ экспериментатор выбирает конкретное условие (одно из семи изложенных в конце предыдущего раздела) в соответствии с декларируемой аналитической функцией $f(R)$; по выбранному условию экспериментатор вычисляет значение $f(\boldsymbol{R})$ функции $f(R)$ в точке $\boldsymbol{R}$.

Во всем остальном случай 2 не отличается от случая 1.

9. Заключительный комментарий

Комментарий касается возможного развития рассматриваемой темы.

Пусть C – некоторый класс взаимно-однозначных непрерывных отображений f из Re в Re. Если этот класс замкнут относительно суперпозиций, то в этом (и только в этом) случае мы будем называть его *типом* (*шкалы*).

Среди бесконечного множества типов шкал небольшое число типов, допускающих простые описания, имеют традиционные названия. Например:

абсолютный тип шкалы – это единичный класс

$$C_a = \{f - f\colon Re \to Re, f(x) = x\};$$

тип шкалы *отношений* – это класс

$$C_{rel} = \{f - f\colon Re \to Re, f(x) = \alpha x, \alpha > 0\};$$

номинальный тип шкалы – это класс

$$C_{no} = \{f - f\colon Re \to Re, f(x) \neq f(y) + x \neq y\}.$$

Пусть: $f(x_1, \ldots x_r)$ – некоторая всюду определенная на Re функция, существенно зависящая от r переменных, принимающая значения в Re; C – некоторый тип шкалы. Мы называем функцию f *характеристикой* (*арности* r) (также (r-*арным*) *инвариантом*) *типа* (*шкалы*) C, если и только если для всякого отображения f – C имеет место тождество $f(f(x_1, \ldots x_r)) = f(f(x_1), \ldots f(x_r))$.

Если C – тип, то через $In_r(C)$ обозначаем класс всех r-арных инвариантов типа C. Очевидно, чем шире C, тем уже $In_r(C)$.

Заметим в этой связи, что r-арным инвариантом абсолютного типа шкалы является любая функция $f(x_1, \ldots x_r)$ от r переменных. Инварианты типа шкалы отношений состоят в точности из r-арных однородных функций первой степени. Состав класса In_r (C_{no}) – открытая, по-видимому, проблема. Все, что пока можно сказать, так это то, что по крайней мере два инварианта в этом классе имеются. Ими являются функции $f_1(x_1, \ldots x_r) = \max\{x_1, \ldots x_r\}$ и $f_2(x_1, \ldots x_r) = \min\{x_1, \ldots x_r\}$. К сожалению, прямой проверкой легко установить, что ни одна из них не удовлетворяет уравнению (8).

Таким образом, если бы мы захотели воспользоваться определением (А) так, как мы воспользовались определением (Б), то это нам пока не удалось бы. С другой стороны, если бы вместо определения (Б) и связанной с ним шкалы отношений, мы воспользовались бы каким-либо другим, более узким, чем (А), определением ($Б^{\#}$) с соответствующей ему шкалой, то никаких априорных логических препятствий к этому нет.

Отсюда вывод: дальнейшее развитие рассматриваемой здесь темы могло бы заключаться в том, чтобы воспроизводить приведенные рассуждения (с соответствующими новыми результатами) для различных, по желанию выбираемых шкал. Читатель может считать, что речь сейчас идет о переводе репрезентационной теории измерений со всеми ее ныне имеющимися достижениями на новый, методологически и практически более обоснованный фундамент.

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск

Kargaltsev, V. E., A.A.Moskvitin and K.F. Samokhvalov. **The way to turn a blackbox into a measurement instrument**

At present, the general conception of measurement is usually considered within the representational theory. However, the latter has an essential defect, since it does not explain from where measurement instruments come into existance. So, the purpose of the paper is to bridge such a gap.

Keywords: logics, measurement theory, measurement instrument